MÉTODO DE OBTENÇÃO DE ESTIMATIVAS PRELIMINARES DE PARÂMETROS DE MODELOS DE CRESCIMENTO SAZONAIS[1]

PAULO SILVEIRA JÚNIOR[2], ÉLIO PAULO ZONTA[3],
AMAURI ALMEIDA MACHADO[4] e RICARDO F. DE SOUSA COSTA[5]

RESUMO - É apresentado um método de obtenção de estimativas preliminares (valores iniciais) dos parâmetros em modelos de crescimento sazonais não-lineares. O método é aplicado ao modelo raiz cúbica de Bertalanffy com componente sazonal. São utilizados para a ilustração do método dados de desenvolvimento ponderal de bovinos da raça Ibagé e de bubalinos da raça Murrah.

Termos para indexação: raiz cúbica de Bertalanffy, curvas de crescimento, modelos não lineares.

A METHOD OF OBTAINING THE PRELIMINARY ESTIMATES OF THE PARAMETERS OF SEAZONAL GROWTH MODELS

ABSTRACT - A method of abtaining the preliminary estimates (inicial values) of the parameters of non-linear models of seazonal growth is presented. The method is applied to the Bertalanffy cubic root model with seazonal components. An illustration is provided through an application of the method to the analysis of growth of weight data of bovines of the Ibagé race and of buffaloes of the Murrah race.

Index terms: Bertalanffy cubic root, growth curves, non-linear models.

INTRODUÇÃO

Em estudos e nas aplicações de modelos não-lineares de crescimento de animais e de plantas, o pesquisador se defronta, freqüentemente, com a questão de atribuir valores iniciais aos parâmetros para dar início ao processo de estimação que, em geral, se dá de forma iterativa.

Alguns métodos analíticos e descritivos são disponíveis na literatura. Entretanto, os processos utilizados, via de regra, não são expeditos, além de compreender certo grau de dificuldade matemática na solução dos sistemas de equações resultantes.

Poucas sugestões alternativas são mostradas na literatura, em contraste com a importância da escolha dos valores iniciais para o sucesso do processo iterativo de estimação, principalmente em modelos com número elevado de parâmetros. As sugestões discutidas mais exaustivamente aplicam-se a algumas famílias particulares de modelos não-lineares.

O método de Richards, citado por Causton (1969), conduz à seguinte linearização do modelo de Richards:

$$W_i = A. \ [1 \pm b . e^{-k . t_i}]^{-1/n}:$$

$$\log \left| (A/W_i)^n - 1 \right| = \log B - k . t_i, \qquad (1)$$

onde W_i é a variável resposta, peso, por exemplo, t_i é o tempo ou instante, A é o valor assintótico ou o peso máximo teórico, B é uma constante de integração, n é função do parâmetro inflexão M = -1/n, que estabelece o grau de maturidade no ponto de inflexão, e K é a taxa de crescimento.

O primeiro membro da equação (1) pode ser determinado desde que os valores de A e n sejam conhecidos ou estimados preliminarmente.

[1] Aceito para publicacão em 3 de abril de 1992.
Trabalho financiado pelo CNPq.

[2] Eng.-Agr., M.Sc., Prof.-Titular, Dep. de Matemática, Estatística e Computação da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Caixa Postal 354, CEP 96010-900 Pelotas, RS.

[3] Eng.-Agr., M.Sc., Prof.-Adjunto, Dep. de Matemática, Estatística e Computação, UFPel.

[4] No curso de graduação em Eng. Agron., UFPel. Bolsista do CNPq.

Os valores dos parâmetros B e k podem, então, ser estimados através do ajustamento do modelo de regressão linear:

$$y_i = \log B - k \cdot t_i,$$

onde $y_i = \log\left|(A/W_i)^n - 1\right|$, o parâmetro A é o valor máximo assintótico de W e assim pode ser estimado através de um gráfico de W_i em relação a t_i. No caso de **n**, pode ser demonstrado que:

$$W_I/A = (n + 1)^{-1/n},$$

onde W_I é o valor de W no ponto de inflexão da função de Richards. Portanto, a partir do gráfico de W_i em relação a t_i, é possível estimar a posição do ponto de inflexão, avaliar a razão W_I/A e obter uma estimativa de **n**.

A partir dos valores estimados de A e n, pode ser determinado o valor y_i correspondente a cada W_i. O gráfico de pontos (t_i, y_i) situa-se sobre a linha reta se os valores de A e n são aproximadamente corretos, salvo por erros de arredondamento. Desvios da linearidade podem, então, ser minimizados por alterações de A e n, como indicado por Richards (1959).

Na prática, a menos que os dados sejam muito regulares, poderá ser encontrada considerável dificuldade na estimação de A e de n, que corresponda a uma linha reta, em parte porque nunca se sabe que reta um conjunto particular de dados dará. Se a função de Richards não é um modelo básico apropriado para os dados disponíveis ou uma boa aproximação para ele, uma relação linear entre y_i e t_i jamais poderá ser obtida para o ajustamento de A e n. À parte essas objeções, há outras desvantagens desse método, associadas com a necessidade de fazer estimações a olho. Em primeiro lugar, para ser possível estimar A e n com algum grau de confiança razoável, valores de W_i devem se estender sobre quase todo o intervalo de variação de W, de próximo de zero até próximo de A. Com dados menos extensos poderão não ser obtidas boas estimativas desses dois parâmetros. Em segundo lugar, um ou mais valores W_i podem resultar maiores que a estimativa de A. Tais pontos terão que ser eliminados de todos os demais cálculos envolvidos na busca de valores iniciais, já que os correspondentes valores y_i não serão definidos.

O método descrito por Hartley (1948), citado por Causton (1969), considera que os parâmetros de certas funções não-lineares podem ser estimados pelo ajustamento das constantes da **lei da geração** da função em questão. Simbolizando a taxa de crescimento relativo $(\frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{W})$ por R, a equação diferencial da função de Richards:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{k.W}{nA^n}(A^n - W^n) \tag{2}$$

pode ser escrita como:

$$R = \frac{k}{n} - \frac{kW^n}{nA^n} \tag{3}$$

ou seja:

$$R = \alpha + \beta \cdot W^c, \tag{4}$$

onde:

$$n = c,\ k = \alpha \cdot n \text{ e } A = (-k/\beta \cdot n)^{1/n}. \tag{5}$$

Assim, as estimativas dos parâmetros n, k e A podem ser determinadas através do ajustamento dessa última equação. Um valor inicial de B é então determinado pela equação (1).

Os dados de um experimento de crescimento consistem em valores de W_i nos tempos t_i; valores de R podem, então, ser calculados a partir dessas observações. Fisher (1921), citado por Causton (1969), mostra que, qualquer que seja a forma da curva de crescimento, o valor médio de R sobre um período de tempo entre dois instantes t_1 e t_2, que correspondem aos valores W_1 e W_2, é dado por:

$$\overline{R} = (\log W_2 - \log W_1)/(t_2 - t_1). \tag{6}$$

Esta expressão é usada para estimar a taxa de crescimento médio relativo entre coletas alternativas, isto é:

$$\bar{R}_{i,i+2} - (\log W_{i+2} - \log W_i)/(t_{i+2} - t_i)$$

Esta taxa é considerada como correspondente ao valor W_{i+1} para fins de ajustamento da equação (4). Assim, uma série de pontos (W_{i+1}, $\bar{R}_{i,i+2}$) é obtida, correspondente a $W_2, \ldots, W_{N-1}$; sendo os dois valores extremos W_1 e W_N necessariamente omitidos. As coordenadas dos pontos (W_{i+1}, $R_{i,i+2}$) são referidas como (W_j, R_j). A variância de R_j pode ser considerada constante, visto que os log W_i são independentes e de variância aproximadamente constante. A variância de W_j é aproximadamente proporcional a W^2. Conseqüentemente, se tem uma população bivariada e, estritamente, o método de quadrados mínimos com as duas variáveis sujeitas a erro, não é aplicável. Entretanto uma vez que se requerem somente valores iniciais aproximados, o modelo de regressão simples pode ser usado.

O ajustamento de quadrados mínimos da equação (4) também requereria o uso de um processo iterativo a partir de valores iniciais dados, e isso prejudicaria o objetivo desse processo. Por isso, o método efetivamente empregado ajusta uma regressão linear simples de R_j em relação a W_j^c com um valor fixo de c. O parâmetro c é inicialmente fixado igual a -1, que é o valor sensível mais baixo para a função de Richards e representa a curva monomolecular. Valores de W_j^c são, a seguir, calculados, e uma equação linear é ajustada, e, então, o valor de c é aumentado de 0,1, e todo o processo é repetido. A soma de quadrados do resíduo obtida na primeira regressão é comparada com a que é obtida na segunda e, se a última é menor, 0,1 é novamente adicionado a c, e nova equação de regressão linear simples é ajustada. O processo continua até que a última soma de quadrados do resíduo seja maior que a anterior. Nesse estágio, a soma de quadrados residual mínima foi alcançada, e assim as estimativas de quadrados mínimos de c, α e β são obtidas. Nesse estágio, a série de pontos (W_j, $\bar{R}_j$) dispõe-se aproximadamente ao longo de uma linha reta. A partir desses valores de c, α e β, os valores iniciais de A, k e n são obtidos pelas equações (5).

Para o cálculo do valor inicial de B, a partir de (1), dois processos alternativos podem ser adotados. Um valor inicial desse parâmetro pode ser calculado através da relação.

$$\log B' = (\Sigma y_i - k' . \Sigma t_i)/N', \qquad (7)$$

onde N' é o número de pontos remanescentes após a eliminação daqueles em que $W_i \geq A$, e o apóstrofo nos parâmetros simboliza os valores iniciais. Alternativamente, ambos, log B' e um novo valor de k', podem ser simultaneamente obtidos por regressão linear simples. Agora, a variância de y_i é pequena quando W_i é pequeno, e se aproxima de infinito quando W_i tende para A'. Um método de quadrados mínimos pode ser formulado para essa situação, mas aqui é adotado o caminho mais simples de usar um método que pressupõe ser a variância de y_i proporcional a t_i.

Na prática, tem-se verificado que o cálculo de apenas B' a partir de (7) não é somente adequado, mas também melhor que a estimação simultânea de B' e k', a menos que o valor de B' seja pequeno, o que será o caso quando n' for próximo de -1. Quando $-1 \leq n' \leq -0{,}7$, por exemplo, o segundo método, em que B' e k' são estimados simultaneamente, é mais eficiente.

Segundo Gallant (1975), a escolha dos valores iniciais é um processo *ad hoc*. Esses valores podem ser obtidos através do conhecimento prévio da situação, da inspeção dos dados, etc.

Freitas & Costa (1983) ao estudarem o ajustamento de modelos não-lineares a dados de crescimento de suínos, fazem referência aos valores iniciais das estimativas dos parâmetros, obtidos de acordo com o método apresentado por Gallant (1975).

Uma aproximação geral para calcular os valores iniciais é dada por Hartley & Booker (1965), citada por Gallant (1975). Denote-se a função não-linear a ajustar por $y = f(x; \theta)$, onde θ é um vetor de p parâmetros. O método consiste em selecionar p valores X_{t_i} representativos e as correspondentes respostas y_{t_i} e, então, resolver o sistema de equações não-lineares para θ , onde,

$$y_{t_i} = f(X_{t_i}, \theta), i = 1, 2, \ldots, p.$$

A solução, quando existir, é usada como valor inicial.

Draper & Smith (1966), ao descreverem o processo de estimação de parâmetros em modelos não-lineares, observam que valores iniciais dos parâmetros podem ser sugeridos do ajustamento de uma equação semelhante de um outro trabalho, ou através da experiência e do conhecimento do pesquisador.

Freitas & Costa (1983) consideram que todos os modelos (Gompertz, Logístico e Bertalanffy) apresentam facilidades computacionais quanto ao ajuste, e, de modo geral, o grau de proximidade entre os valores iniciais e as estimativas finais dos parâmetros não influenciam o número de iterações.

Ludwig (1977) faz referência à proximidade dos valores iniciais com as estimativas obtidas, dizendo que ela não parece ter influência sobre o número de iterações. Comenta Ludwig que não houve uma releção aparente que mostrasse qualquer dependência do número de iterações com os coeficientes de determinação ou soma de quadrados dos desvios; tanto um ajustamento muito bom, quanto um mau ajustamento, em termos de coeficiente de determinação, apresentaram número elevado de iterações.

O que se observa, de uma maneira geral, em trabalhos de ajustamento de curvas de crescimento, é que o número de iterações é muito elevado, independentemente do modelo e do método de ajustamento utilizado.

Alves et al. (1987), ao avaliarem curvas de crescimento de suínos em cruzamentos dialélicos, ajustaram os modelos Brody, Bertalanffy, Logístico, Gompertz e Richards, utilizando o algoritmo de Marquardt, de acordo com Euclydes (1983). O menor número médio de iterações registrado no trabalho foi de 21, para o modelo Logístico, e o maior, 43, para o modelo Bertalanffy.

Silveira Júnior (1976), ao estudar o comportamento do desenvolvimento ponderal de bovinos de raça Ibagé, frente aos modelos de crescimento de Brody, Logístico, Gompertz e Bertalanffy, utilizando o método modificado de Gauss-Newton, Hartley (1961), para estimação de parâmetros e usando valores iniciais arbitrários, obteve como resultado um número médio de nove iterações.

Silveira Júnior & Machado (1990), em um estudo do comportamento do crescimento de bovinos Ibagé, utilizando o modelo Brody para a raiz cúbica do peso, adicionado de um componente sazonal, e Silveira Júnior et al. (1990), ao ajustarem o mesmo modelo aos dados de crescimento de búfalos, obtiveram um número médio de cinco iterações, com um modelo de sete parâmetros. Em ambos os trabalhos, os autores utilizaram o processo de determinação de valores iniciais para as estimativas dos parâmetros descrito no presente artigo.

Com o propósito de evitar a arbitrariedade na tomada de valores iniciais dos parâmetros, o uso de processos apenas descritivos, trabalhando-se portanto com valores iniciais com algum grau de subjetividade, e processos analíticos com grau de dificuldade relativamente alto na solução matemática dos sistemas de equações resultantes, sugere-se um método analítico de obtenção de valores iniciais de parâmetros, ou de estimativas preliminares, mais objetivo, em modelos de crescimento sazonais propostos por Silveira Júnior (1979).

MÉTODO PROPOSTO

A sazonalidade de elementos climáticos, característica de regiões de clima temperado das nossas latitudes (em torno de 30°S) e também de acentuada transição climática, Mota (1983), influencia a disponibilidade de pastagens, do que decorrem alterações do desenvolvimento ponderal de animais. Esse fenômeno ocorre, por exemplo, na Região Sudeste do Estado do Rio Grande do Sul, onde estão situados, entre outros, os municípios de Pelotas e de Bagé, e de onde são procedentes os animais utilizados.

Para essas regiões em que ocorre o fenômeno da sazonalidade, influenciando o crescimento dos animais com estabilização ou queda de peso, Silveira Júnior (1979), Silveira Júnior & Amaral (1982), Silveira Júnior & Machado (1990) e Silveira Júnior et al. (1990)

recomendam a utilização de modelos de crescimento adicionados de um componente, com vistas a representar o efeito da oscilação sazonal.

O modelo de crescimento utilizado baseia-se no de von Bertalanffy, ou seja:

$$W_t = A(1 - B \,.\, e^{Kt})^3,$$

onde W é o peso observado no instante t; A, o peso máximo teórico; B, uma constante de integração; e K, a taxa de crescimento.

Para contornar o problema de heterogeneidade de variância, os pesos são preliminarmente submetidos à raiz cúbica. Tal transformação, aplicada ao modelo von Bertalanffy, resulta no modelo Brody para a raiz cúbica do peso (Silveira Júnior 1979), ou seja:

$$\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \,.\, e^{-Kt},$$

onde K é a taxa de crescimento; portanto, o mesmo significado, porém:

$$A' = A^{1/3} \text{ e } B' = A^{1/3} \,.\, B.$$

Ao modelo Brody para a raiz cúbica do peso, é, então, acrescentado um componente sazonal:

$$\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \,.\, e^{-Kt} + Z(t)$$

com $Z(t) = P_0 + \sum_{i=1}^{2} P_i \cos(i \alpha t) + \sum_{i=1}^{2} q_i \operatorname{sen}(i \alpha t)$, onde $P_0 = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} \hat{Z}(t)$, $P_i = \frac{1}{6,5} \sum_{i=1}^{13} \hat{Z}(t).\cos(i \alpha t)$, $q_i = \frac{1}{6,5} \sum_{i=1}^{13} \hat{Z}(t).\operatorname{sen}(i \alpha t)$, $\alpha = \frac{360^o}{13}$ e $\hat{Z}(t) = \sqrt[3]{w_t} = \hat{A}' - \hat{B}' \,.\, e^{-Kt}$, $t = 1, 2, \ldots, 13$, são os valores do componente sazonal obtidos com as estimativas preliminares dos parâmetros A', B' e K.

O método proposto de obtenção de estimativas preliminares dos parâmetros está fundamentado nos seguintes passos:

a. Determinam-se as diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos dos meses correspondentes de dois anos consecutivos. O modelo para essa análise de diferenças é, então,

$$d_i = \sqrt[3]{W_{t+n}} - \sqrt[3]{W_t} = B' \,.\, (1 - e^{-nK}).e^{-Kt},$$

uma vez que o termo A' se cancela, o mesmo acontecendo com o componente sazonal, pois, sendo Z(t) uma função periódica, $Z(t+n) = Z(t)$ (Amaral 1968), onde n representa o número de pesagens no período básico (ano, no caso dos animais que servirão de exemplo).

b. Lineariza-se, por anamorfose, a equação das diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos d_t, obtendo-se:

$$\log d_t = \log B' \,.\, (1 - e^{-nK}) - (K \,.\, \log e).t,$$

que é uma equação de regressão linear simples, da forma:

$$\log d_t = a + b \,.\, t,$$

onde $a = \log [B' \,.\, (1 - e^{-nK})]$, $b = -K \,.\, \log e$, $t = 1, 2, \ldots m$, e m igual ao número de diferenças. No caso de trabalhar com animais de dois anos de idade, m = n.

c. Determinam-se as estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dos parâmetros **a** e **b** do modelo de regressão linear simples, pelo método dos quadrados mínimos.

d. As estimativas preliminares dos parâmetros B' e K são, então, determinadas através das seguintes expressões:

$$\hat{K} = \frac{-\hat{b}}{\log e} \text{ e } B' = 10^{(\alpha - \log(1 - e^{-m\hat{K}})},$$

e. Uma vez determinadas essas estimativas preliminares dos parâmetros B' e K, calcula-se uma estimativa preliminar para o parâmetro A', como segue, a partir da seguinte equação:

$$\hat{A}' = \sqrt[3]{W_t} + B' \,.\, e^{-\hat{K}t} - \hat{Z}(t)$$

Somando-se 2n valores consecutivos de $\sqrt[3]{W_t}$, correspondente a dois anos de vida do animal, obtém-se:

$$2n\hat{A}' = \sum_{t=1}^{2n} \sqrt[3]{W_t} + \hat{B}' \sum_{t=1}^{2n} e^{-\hat{K}t},$$

pois $\sum_{t=1}^{2n} Z(t) = 0.$

Uma estimativa preliminar do parâmetro A' é, então, dada por:

$$\hat{A}' = \left[\sum_{t=1}^{2n} \sqrt[3]{W_t} + B' \sum_{t=1}^{2n} e^{-\hat{K}t} \right] / 2n$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

São utilizados, para ilustração do método, dados de desenvolvimento ponderal de bovinos da raça Ibagé (5/8 Angus -3/8 Zebu) (Chagas et al. 1972 e Silveira Júnior 1979) e de bubalinos da raça Murrah (Silveira Júnior et al. 1990). Os dados foram obtidos junto ao Centro Nacional de Pesquisa de Ovinos - CNPo, - Bagé, RS, e do Centro de Pesquisa de Terras Baixas de Clima Temperado - CPATB - Capão do Leão, RS, ambos da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA).

Tanto o desenvolvimento ponderal de bovinos como o de bubalinos revelam períodos de queda e de estabilização de peso, devido à sazonalidade, fenômeno conhecido na região sudeste do Estado do Rio Grande do Sul.

São apresentados, nas Tabelas 1 e 2, os desenvolvimentos ponderais médios dos bovinos e dos bubalinos, que servirão como exemplos para a ilustração do método de obtenção de estimativas preliminares de parâmetros de modelos de crescimento sazonais. Valores grifados nessas tabelas indicam período de queda e de estabilização do peso.

O modelo de crescimento sazonal utilizado na ilustração do método é o proposto por Silveira Júnior (1979):

$$\sqrt[3]{W_t} = A' - B' . e^{-Kt} + Z(t)$$

De acordo com o método proposto deverão ser obedecidos os seguintes passos:

a. Determinação das diferenças $d_t = \sqrt[3]{W_{t+n}} - \sqrt[3]{W_t}$.

Para o desenvolvimento ponderal médio dos animais da Tabela 1, tem-se n = 13 meses (de 28 dias) e m = 16 diferenças, uma vez que o desenvolvimento ponderal foi registrado até 29 meses. Para os dados da Tabela 2, tem-se n = m = 13.

b. Linearização da equação d_t, determinando-se os logaritmos decimais dessas diferenças, que, para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos, encontram-se ilustrados na Tabela 3.

c. Obtenção das estimativas dos coeficientes **a** e **b** do modelo de regressão linear $\log d_t = a + b \cdot t$, que, para os bovinos machos, por exemplo, são: $\hat{a} = 0{,}32239$ e $\hat{b} = -0{,}02442$.

d. Cálculo das estimativas preliminares dos parâmetros B' e K com base nos valores de $\hat{a}$

TABELA 1. Desenvolvimento ponderal médio de bovinos da raça Ibagé, 73 machos e 55 fêmeas.

Machos	44	66	86	107	127	150	172	184	**187**	**183**	**176**	**174**
	192	215	247	255	272	279	291	303	**311**	**310**	**303**	**291**
	305	328	358	379	392							
Fêmeas	41	58	80	99	118	140	161	175	**182**	**180**	**175**	**169**
	168	182	199	214	224	231	240	252	257	**260**	**249**	**242**
	243	**245**	**264**	281	303							

TABELA 2. Desenvolvimento ponderal médio de búfalos da raça Murrah nascidos nos períodos outono-inverno (18 animais) e primavera-verão (60 animais).

Out.-Inv.	60	84	108	134	159	182	206	223	238	246	**250**	**250**
	252	**250**	**250**	257	269	291	310	331	354	372	386	**390**
	392	**394**										
Prim.-Ver.	59	91	121	148	173	194	211	223	240	250	264	280
	294	309	322	336	**344**	**343**	**344**	**345**	**349**	356	370	385
	407	433										

TABELA 3. Diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos d_t e log d_t, para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da raça Ibagé.

Medidas	1	2	3	4	5	6	7	8
d_t	2,460	2,233	1,927	1,732	1,508	1,313	1,155	1,087
log d_t	0,391	0,349	0,285	0,239	0,178	0,118	0,063	0,036
Medidas	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
d_t	1,049	1,039	1,023	1,149	1,127	1,110	0,963	0,977
log d_t	0,021	0,017	0,010	0,060	0,052	0,045	-0,016	-0,010

e $\hat{b}$, ou seja:

$$\hat{K} = \frac{-\hat{b}}{\log e} = \frac{0{,}02442}{0{,}4343} = 0{,}0562$$

e

$$\hat{B}' = 10^{\hat{\alpha} - \log(1-e^{-n\hat{K}})} = 10^{0{,}32239 - \log[1-e^{(-13)(0{,}0562)}]} = 4{,}0527$$

e. Determinação da estimativa do parâmetro A', em função de $\hat{B}'$ e $\hat{K}'$, já calculados, tal como:

$$A = \left[\sum_{t=4}^{29} \sqrt[3]{W_t} + 4{,}0527 \sum_{t=4}^{29} e^{-0{,}0562 \cdot t}\right/26 = 7{,}9735$$

Na Tabela 4 encontram-se os resultados das estimativas preliminares dos parâmetros A', B' e K para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos Ibagé (machos e fêmeas) e dos bubalinos Murrah, nascidos nos períodos outono-inverno e primavera-verão.

TABELA 4. Estimativas preliminares dos parâmetros A', B' e K (modelo proposto por Silveira Júnior (1979)) para o desenvolvimento ponderal médio de bovinos e bubalinos.

Animais	Parâmetros		
	A'	B'	K
Bovinos			
Machos	7,974	4,053	0,056
Fêmeas	6,873	2,925	0,076
Bubalinos			
Out.-Inv.	7,850	3,406	0,063
Prim.-Ver.	7,574	3,521	0,101

Utilizando-se o método modificado de Gauss-Newton, Hartley (1961), e os valores iniciais obtidos pelo método em discussão, a convergência para os valores finais corretos das estimativas dos parâmetros foi conseguida após oito iterações, em média.

Por outro lado, ao usar valores arbitrários como estimativas iniciais dos parâmetros do modelo, como, por exemplo0, para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da Tabela 1, tais como A' = 7,3185 (raiz cúbica do peso no final do período), B' = 4,3334 (calculado para t = 0, supondo A' conhecido) e K = 0,1345 (calculado para t = 1, supondo A' e B' conhecidos), a convergência para os valores finais das estimativas dos parâmetros do modelo foi obtida após treze iterações, em média.

A convergência para as estimativas de quadrados mínimos corretas não é assegurada por qualquer dos métodos. Espera-se, entretanto, que a determinação dos valores iniciais por um método racional a partir dos próprios dados resulte em maior garantia de convergência correta. Todavia esta questão somente poderá ser respondida por estudos de simulação pelo método de Monte Carlo.

Embora não seja o aspecto mais importante, tem-se constatado que a velocidade de convergência é maior quando se utilizam valores obtidos pelo método proposto.

É conveniente registrar que o método racional de obtenção de estimativas preliminares aplicado a vários conjuntos de dados de desenvolvimento ponderal (de bovinos de diferentes raças, de bubalinos e de aves) e a outros modelos de crescimento tem conduzido sempre à convergência para as estimativas de quadrados mínimos corretas, com um número baixo de iterações.

Tais constatações permitem enumerar, pela racionalidade do método proposto, as seguintes vantagens: a) maior garantia de convergência para valores corretos; b) maior velocidade de convergência; c) utilidade na ausência de experiência para determinação subjetiva de valores iniciais.

CONCLUSÕES

1. Pode-se evitar a arbitrariedade na tomada de valores iniciais de parâmetros de modelos de crescimento sazonais, recomendados por Silveira Júnior et al. (1990), utilizando-se um método mais objetivo e com maior garantia de convergência para valores corretos.

2. O método de obtenção de estimativas preliminares com essas características, apresentado com detalhes no item "metodologia", resumidamente se fundamenta nos seguintes passos:

a. Determinação das diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos dos meses correspondentes de dois anos consecutivos, ou seja:

$$d_t = \sqrt[3]{W_{t+n}} - \sqrt[3]{w_t} = B' . (1 - e^{-nK}) . e^{-Kt} .$$

b. Linearização da equação d_t:

$$\log d_t = a + b . t,$$

onde $a = \log [B' . (1 - e^{-nK})]$, $b = -K . \log e$, $t = 1, 2, \ldots . m$, e m igual ao número de diferenças.

c. Cálculo das estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dos parâmetros **a** e **b** do modelo de regressão linear simples.

d. Obtenção das estimativas preliminares dos parâmetros A', B' e K, através das seguintes expressões:

$$\hat{K} = \frac{-\hat{b}}{\log e}, \quad \hat{B}' = 10^{(\hat{a} - \log(1 - e^{-m\hat{K}})}$$

$$\hat{A}' = \left[\sum_{t=1}^{2n} \sqrt[3]{W_t} + B' \sum_{t=1}^{2n} e^{-\hat{K}t} \right] / 2n$$

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. João Gilberto Corrêa da Silva, Prof. Titular do Dep. de Matemática, Estatística e Computação da Univ. Fed. de Pelotas, pela revisão deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALVES, R.G.O.; SANCEVERO, A.B.; SILVA, M.A.; PEREIRA, J.A.A. Avaliação de curvas de crescimento de suínos em cruzamentos dialélicos. **Revista Sociedade Brasileira de Zootecnia,** v.16, n.6, p.575-587, nov./dez. 1987.

AMARAL, E.C. Análise harmônica. **Pesquisa Agropecuária Brasileira,** Rio de Janeiro, v.3, p.7-43, 1968.

CUSTON, D.R. A computer program for fitting the Richards function. **Biometrics,** v.25, n.2, p.401-409, 1969.

CHAGAS, E.C.; CAGGIANO FILHO, P.; GARCIA, J.T.C. **Formação do 5/8 Angus e 3/8 Zebu.** [S.l.]: IPEAS, 1972. (Circular IPEAS, 57).

DRAPER, N.; SMITH, H. **Applied regression analysis.** New York: John Wiley & Sons, 1966. 407p.

EUCLYDES, R.F. **Manual de utilização do programa SAEG (Sistema para Análises Estatísticas e Genéticas).** Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 1983.

FREITAS, A.R.; COSTA, C.N. Ajustamento de modelos não-lineares a dados de crescimento em suínos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira,** Brasília, v.18, n.10, p.1147-1154, 1983.

GALLANT, A.R. Nonlinear regression. **The American Statistician,** v.29, n.2, p.73-81, 1975.

HARTLEY, H.O. The modified Gauss-Newton method for the fitting of non-linear regression functions by least squares. **Technometrics,** v.3, p.269-280, 1961.

LUDWIG, A. **Ajustamento de curvas exponenciais ao crescimento de gado Nelore e análise de seus**

parâmetros. Viçosa: UFV, 1977. 84p. Dissertação de Mestrado.

MOTA, F.S. **Normais e Séries Climatológicas.** Campus da UFPel, período 1951/1980. Pelotas, RS: Universidade Federal de Pelotas, 1983. (Boletim Técnico, 6).

RICHARDS, F.J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany,** v.10, p.290-300, 1959.

SILVEIRA JÚNIOR, P. **Estudo de alguns modelos exponenciais no crescimento de bovinos da raça Ibagé.** Piracicaba: ESALQ, 1976. 174p. Tese de Mestrado.

SILVEIRA JÚNIOR, P. **Modelo de crescimento para bovinos da raça Ibagé tendo em conta a oscilação sazonal.** Pelotas, RS: UFPel. 1979. Tese Professor Titular.

SILVEIRA JÚNIOR, P.; AMARAL, E.C. Modelo de crescimento para bovinos da raça Ibagé tendo em conta a oscilação sazonal. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 4., 1980, Rio de Janeiro. **Atas...** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1982. p.13-22.

SILVEIRA JÚNIOR, P.; MACHADO, A.A. Adição de componente sazonal em modelos de crescimento. **Pesquisa Agropecuária Brasileira,** Brasília, v.25, n.1, p.67-75, jan. 1990.

SILVERA JÚNIOR, P.; MACHADO, A.A.; SILVA, M.A. Modelos exponenciais com componente sazonal ajustados ao crescimento de búfalos da raça Murrah. **Ciência e Cultura,** v.42, n.1, p.36-47, jan. 1990.