

IMPORTÂNCIA DO MODELO MATEMÁTICO NA DETERMINAÇÃO DO NÍVEL CRÍTICO DE POTÁSSIO NO SOLO¹

José Mário Braca²

SINOPSE.- São apresentados dados de formas de potássio em vinte solos do Estado de Minas Gerais, determinando, para cada uma destas formas, o nível crítico, usando diferentes modelos matemáticos, em relação ao crescimento relativo.

Constatou-se que o nível do elemento no solo depende do modelo matemático usado no ajustamento dos dados. Esses níveis críticos variam conforme o extrator usado na determinação do elemento.

Termos de indexação: Solo, potássio, nível crítico, determinação, modelo matemático.

INTRODUÇÃO

Procedendo-se à avaliação da fertilidade do solo, tem-se como objetivo primário o relacionamento entre a quantidade do elemento no solo e o crescimento vegetal. Este relacionamento, às vezes estabelecido apenas pela significância do coeficiente de correlação ou expresso por modelos matemáticos, permite que se estabeleçam níveis de fertilidade e se estime a probabilidade de resposta à aplicação de fertilizantes (Bray 1948, Cate & Nelson 1965, 1971, Fitts & Nelson 1956).

Quando a quantidade do elemento no solo, avaliada por algum método, e o crescimento vegetal se correlacionam significativamente, entende-se que esta quantidade é "disponível" (Bray 1948). Com base neste critério, muitos extratores químicos para fósforo, potássio e outros elementos têm surgido (Catani 1954, Hood *et al.* 1956, Martini 1966, Oommen & Iswaran 1962) e a conceituação do que é "disponível" é independente da forma química que tem o elemento no solo. Assim, tan-

to é "disponível" o potássio sob a forma trocável como o é o potássio total (Arnold & Close 1961, Bishop *et al.* 1954, Braga 1972, Datta & Kalbande 1967, Grewall & Kanwar 1966, Horton 1949).

Avaliada a quantidade "disponível" do elemento no solo e relacionando-se esta quantidade com o crescimento vegetal, estabelece-se o nível crítico. Entretanto, este nível crítico não pode ser generalizado, e o uso só é válido quando se fizer referência ao modelo matemático usado na sua determinação. Para mostrar este fato foi elaborado este trabalho.

MATERIAL E MÉTODOS

Em amostras superficiais de vinte solos do Estado de Minas Gerais, foi feita a determinação, com diversos extratores, do potássio potencial, trocável, não trocável e "disponível". Os métodos usados estão relacionados no Quadro 1.

QUADRO 1. Formas de potássio e extratores usados para obtê-las

Formas	Extratores		Relação solo: solução	Tempo de agitação (min)	Referências
	Nome	Composição química			
Potencial	—	CaCl ₂ 0,01M	1:2	30	MacLean (1961)
Trocável	—	NH ₄ OAC 1N pH 7	1:10	30	Halstead e Heeney (1959)
Não trocável	A	H ₂ SO ₄ conc.	1:60	—	Hunter e Pratt (1957)
	B	H ₂ SO ₄ conc.	1:51	—	Hunter e Pratt (1957)
	C	H ₂ SO ₄ 6N	1:2	5	Hunter e Pratt (1957)
		HNO ₃ 1N, a quente	1:12,5	10	Hunter e Pratt (1957)
"Disponível"	Bray 1	NH ₄ F 0,0310N + HCl 0,025N	1:10	5	Bray (1948)
	Bray 2	NH ₄ F 0,03N + NCl 0,1N	1:10	5	Bray (1948)
	IAC	H ₂ SO ₄ 0,05N	1:4	10	Catani <i>et al.</i> (1955)
	IAC	HNO ₃ 0,05N	1:10	10	Catani <i>et al.</i> (1955)
	Mehlich	H ₂ SO ₄ 0,025N + HCl 0,05N	1:4	10	Reid e Copelano (1969)
	Mehlich	H ₂ SO ₄ 0,025N + HCl 0,05N	1:10	5	Vettori (1969)
	Morgan	NaOAC 1N, pH = 4,8	1:2	108	Hende e Cottenie (1960)

¹ Aceito para publicação em 13 de março de 1975.

² Professor Adjunto da Universidade Federal de Viçosa, Cx. Postal 309, Viçosa, Minas Gerais.

Para trabalhos de estufa, 2 kg das amostras de solo foram colocados em vasos de cerâmica revestidos com plástico. Aplicou-se, em todos os vasos, uma adubação básica com todos os elementos, com exceção do potássio. Este foi aplicado na forma de cloreto de potássio em quatro níveis, com três repetições. Como planta indicadora, foi usado o painço (*Settaria italica*, Beauw). Plantadas 25 sementes, considerou-se um período de crescimento de quarenta dias. Após este tempo, o peso seco da parte aérea do vegetal, no tratamento sem potássio, foi relacionado com o maior peso seco da parte aérea da planta, dos tratamentos com potássio. O valor desta relação foi considerado como o crescimento relativo do vegetal.

Os teores de potássio, usando-se os diferentes métodos do Quadro 1, foram correlacionados com os valores de crescimento relativo e ajustados aos seguintes modelos matemáticos:

Modelos	Equações
linear,	$Y = AX + B;$
quadrático,	$Y = AX^2 + BX + C;$
Mitscherlich,	$\log((100 - Y): 100) = -CX;$
hiperbólico,	$Y = A(1 - X) + B;$
raiz quadrada,	$Y = AX^{1/2} + BX + C;$
semilogarítmico,	$Y = A \log X + B;$
Cate-Nelson,	$Y = AX + B;$

onde Y é o valor do crescimento relativo e X o teor de potássio; no caso do Cate-Nelson, X é zero abaixo do nível crítico e X é igual a um, para os pontos situados acima do crítico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os teores de potássio e os valores de crescimento relativo do vegetal dos vinte solos estudados estão no Quadro 2. Mais detalhes sobre estes dados e as análises estatísticas realizadas estão em Braga (1972).

Os teores de potássio foram correlacionados entre si e com os valores de crescimento relativo, tendo sido obtidos valores altamente significativos (Quadro 3). Estes resultados estão de acordo com os trabalhos realizados por outros pesquisadores (Laws 1962, Mohr 1959, Rengaswamy *et al.* 1966, Semb & Uhlen (1965), Sutton & Seay 1958, Cama 1967).

Os dados do Quadro 3 mostram que, conforme o conceito de elemento "disponível" de Bray, todas as formas de potássio (potencial, trocável e não trocável) também avaliaram, neste trabalho, o potássio "disponível". Também os extratores de elemento "disponível" funcionaram bem neste ensaio, uma vez que os teores de potássio obtidos com eles se correlacionaram, significativamente, com o crescimento relativo.

Relacionando os teores de potássio com os valores de crescimento relativo, conforme os modelos matemáticos propostos, obtiveram-se os coeficientes de determinação que estão no Quadro 4. Verificou-se que, para as formas de potássio, os coeficientes de determinação variaram, conforme o modelo matemático proposto, assim como, para cada um deles, os coeficientes de determinação também sofreram variação.

Os maiores coeficientes de determinação foram obtidos quando o ajustamento se fez com dados de potássio trocável e com os de potencial de potássio. Destas duas

QUADRO 2. Teores de potássio, conforme a forma e extratores, dos solos em estudo

Solo n.º	Trocável (ppm)		Não trocável (ppm)				Disponível (ppm)			Crescimento relativo (%)	
	Potencial	H ₂ SO ₄	HNO ₃		Bray	Mehlich	IAC HNO ₃ 0,05N	H ₂ SO ₄ 0,03N	Morgan		
			A	C							
1	2,328	51,5	74,9	43,0	64,0	51,5	36,2	39,0	63,4	31,2	63
2	2,020	94,4	116,0	87,4	160,0	81,1	75,0	77,2	101,4	109,2	79
3	1,932	148,2	183,3	106,1	208,0	93,6	112,3	98,5	134,2	199,4	87
4	1,898	101,4	210,6	154,4	224,0	148,8	177,8	168,5	212,5	179,4	83
5	2,087	57,6	63,9	53,7	144,0	48,4	45,0	39,8	60,4	62,4	43
6	2,714	35,9	39,0	20,8	128,0	29,5	29,0	15,6	25,4	31,2	33
7	1,826	109,6	149,8	99,8	230,0	84,2	70,0	75,6	81,9	80,7	83
8	2,039	99,8	105,6	92,0	105,0	90,5	81,0	90,5	132,6	97,5	96
9	1,806	111,1	304,2	74,9	164,0	71,8	67,5	65,6	91,6	105,3	99
10	1,644	241,8	702,0	446,9	368,2	312,0	242,5	340,2	298,4	561,6	100
11	2,226	89,7	112,3	60,8	144,0	65,5	47,5	51,5	74,1	42,9	68
12	2,381	41,3	44,3	32,9	48,0	43,7	27,5	29,6	46,8	54,8	35
13	1,867	109,2	115,4	101,4	156,0	131,2	159,1	133,4	149,2	156,0	94
14	1,797	132,6	429,0	289,0	288,0	180,9	172,5	182,5	241,8	280,8	92
15	2,601	103,2	288,6	110,8	144,0	98,3	95,0	112,3	146,3	124,8	97
16	1,990	171,6	655,2	254,3	326,0	113,9	117,5	121,5	275,9	456,3	93
17	1,755	249,2	320,6	224,6	528,0	131,0	200,0	198,3	214,3	405,6	100
18	1,846	134,8	335,4	184,3	320,0	174,6	135,0	184,1	214,3	315,9	68
19	2,221	60,8	109,2	48,4	136,0	70,5	67,5	63,9	89,7	42,0	80
20	1,851	109,0	421,2	129,5	352,0	162,2	127,5	180,9	243,7	249,6	99

Quadro 3. Coeficiente de correlação linear mostrando a relação entre teores de potássio e crescimento relativo de vegetal*

Formas de potássio	Disponível						Crescimento relativo					
	Não trocável			Trocável								
	H ₂ SO ₄ A	H ₂ SO ₄ B	HNO ₃ 6N	HNO ₃ 1N	Bray 1 2	IAC HNO ₃ 0,05N		Mehlich 1:4 1:10	H ₂ SO ₄ 0,05N	Morgan		
Potencial	-0,661	-0,708	-0,710	-0,678	-0,733	-0,714	-0,719	-0,774	-0,778	-0,728	-0,648	-0,803
Trocável	0,870	0,904	0,885	0,899	0,732	0,796	0,813	0,809	0,791	0,766	0,884	0,698
H ₂ SO ₄ A		0,912	0,892	0,891	0,757	0,870	0,883	0,898	0,821	0,877	0,944	0,622
H ₂ SO ₄ B		0,984	0,984	0,953	0,900	0,990	0,956	0,965	0,913	0,888	0,956	0,597
H ₂ SO ₄ 6N				0,233	0,918	0,964	0,961	0,951	0,904	0,873	0,944	0,587
HNO ₃ 1N					0,826	0,866	0,872	0,897	0,852	0,796	0,911	0,518
Bray 1						0,932	0,950	0,892	0,937	0,871	0,831	0,575
Bray 2							0,988	0,944	0,935	0,934	0,922	0,596
HNO ₃ 0,05N								0,948	0,944	0,934	0,935	0,614
Mehlich 1:4									0,945	0,945	0,889	0,686
Mehlich 1:10										0,945	0,889	0,631
H ₂ SO ₄ 0,05N											0,987	0,669
Morgan												0,520

* Todos os valores do coeficiente de correlação são significantes a 1%.

formas, os coeficientes de determinação com dados de potássio trocável só não foram superiores aos de potencial de potássio, quando os modelos usados foram o da raiz quadrada e o linear. Para este modelo, os ajustamentos com os dados de todas as formas mostraram coeficientes de determinação inferiores ao coeficiente obtido com os outros modelos, excetuando, em alguns casos, a forma potencial de potássio. Este comportamento é explicável, considerando-se a maneira como o potencial é calculado. Coerente com esta explicação, quando o modelo matemático usado foi o semilogarítmico, para o potássio como potencial de potássio, o coeficiente de determinação aumentou, chegando até a ser maior do que o obtido com o modelo hiperbólico.

O modelo sugerido por Cate e Nelson (1965, 1971) mostra menor variação nos coeficientes de determinação para os teores de potássio nas diversas formas. Com exceção do potássio extraído com o extrator ácido nítrico 1N, os coeficientes de determinação das demais formas não mostraram diferenças sensíveis.

Verificou-se que, quando se usou o modelo hiperbólico, os coeficientes de determinação foram maiores do que para os outros modelos, com exceção do modelo Cate-Nelson. Entretanto, para a forma de potássio não trocável, obtida com ácido sulfúrico A, e para a forma trocável, os coeficientes da determinação com o modelo hiperbólico foram maiores do que os coeficientes obtidos com o modelo Cate-Nelson.

O modelo Mitscherlich é largamente usado para mostrar o relacionamento entre os teores de potássio e o crescimento relativo (Freitas *et al.* 1966, Wiese 1961). No presente ensaio, o ajustamento dos dados, usando-se este modelo, não mostrou coeficientes de determinação maiores do que os do modelo Cate-Nelson e do modelo hiperbólico. Entretanto, em alguns casos, os dados se ajustaram bem usando a equação de Mitscherlich, principalmente com os dados de potássio "disponível", obtido pelo extrator Mehlich 1:4.

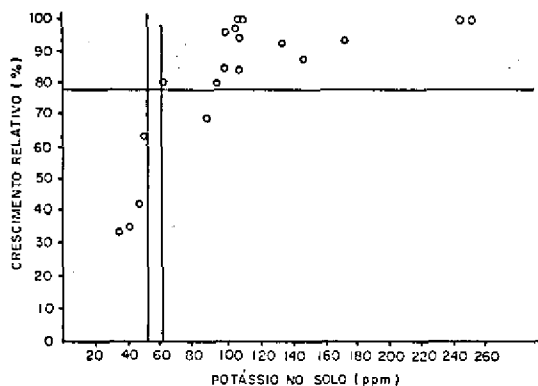


FIG. 1. Determinação de nível crítico de potássio (ppm) pelo método de Cate-Nelson (1965-1971), usando como extrator o acetato de amônio 1N, pH = 7.

Considerando o modelo Cate-Nelson, determinou-se para cada forma de potássio o nível crítico. A Fig. 1 mostra um exemplo do método gráfico, e no Quadro 5 estão os valores de níveis críticos, obtidos estatisticamente.

QUADRO 4. Coeficientes de determinação de crescimento relativo e formas de potássio nos solos em estudo, segundo os modelos matemáticos propostos

Extratores	2.º Grau	Mits.	Hiperb.	R. quadr.	Linear	Semilog.	C/N
Bray 2	0,53	0,48	0,72	0,40	0,35	0,56	0,74
Bray 1	0,54	0,42	0,69	0,45	0,33	0,57	0,74
HNO ₃ 0,05N	0,55	0,49	0,69	0,51	0,39	0,64	0,74
Mehlich 1:10	0,61	0,49	0,63	0,49	0,38	0,59	0,74
H ₂ SO ₄ 0,05N	0,69	0,44	0,69	0,55	0,45	0,64	0,74
Morgan	0,37	0,47	0,48	0,35	0,28	0,42	0,57
Mehlich 1:4	0,63	0,62	0,74	0,57	0,47	0,67	0,74
H ₂ SO ₄ A	0,55	0,53	0,79	0,50	0,39	0,62	0,74
H ₂ SO ₄ B	0,52	0,59	0,68	0,49	0,36	0,61	0,74
H ₂ SO ₄ 6N	0,45	0,52	0,69	0,42	0,31	0,55	0,74
HNO ₃ 1N	0,33	0,49	0,38	0,32	0,27	0,36	0,35
Trocável	0,73	0,72	0,80	0,60	0,49	0,69	0,77
Potencial	0,64	0,64	0,61	0,64	0,64	0,63	0,75

QUADRO 5. Níveis críticos de potássio dos solos em estudo, obtidos pelo modelo Cate-Nelson

Extratores	Nível crítico (ppm)
Potencial	2,039
Trocável	51,5
H ₂ SO ₄ A	74,9—105
H ₂ SO ₄ B	54,6—60,8
H ₂ SO ₄ 6N	43,7
Bray 2	63,4—35,5
Bray 1	51,5—35,5
HNO ₃ 0,05N	39,8—51,5
Mehlich 1:10	56,2—91,1
H ₂ SO ₄ 0,05N	63,4—74,1
Morgan	62,4
Mehlich 1:4	45,0—17,0

QUADRO 6. Valor do nível crítico para potássio trocável conforme o ajustamento aos modelos matemáticos considerando um crescimento relativo de 80%

Modelo	Nível crítico (ppm)
Cate-Nelson	51,0
Quadrático	95,0
Mitscherlich	84,9
Parabólico	87,0
Raiz Quadrada	106,5
Linear	113,6
Semilogarítmico	100,0

Pela Fig. 1, nota-se que há uma faixa vertical, que vai de 50 a 60 ppm, separando os pontos que se situam nos quadrantes 1 e 3, chamados de quadrantes positivos pelos autores. Nesta figura, considerou-se a horizontal passando em 80% de crescimento relativo, muito embora também se note uma faixa vindo até 65%, permitindo incluir todos os pontos no primeiro quadrante. Aplicando-se o modelo Cate-Nelson para a horizontal, pode-se determinar a percentagem de crescimento relativo que

corresponde ao nível crítico encontrado. Este procedimento traria a vantagem de se poder estimar a probabilidade de resposta com o nível crítico, segundo recomendam Fitts e Nelson (1956).

Considerando-se como bom aquele nível crítico que corresponde a 80% de crescimento relativo, haverá para cada modelo matemático um nível crítico. No Quadro 6 estão os dados obtidos para potássio trocável, que foi tomado como exemplo, por ter maiores coeficientes de determinação. Há uma grande amplitude de variação entre os níveis críticos obtidos, indo de 51 até 113,6 ppm. Diante destes dados, não se pode dizer qual o nível crítico para potássio trocável, sem fazer menção ao modelo matemático usado nesta determinação. Verificou-se que quando o método químico permaneceu o mesmo, o nível foi alterado pelo modo de se manusearem os dados. Tal fato é tão esdrúxulo que, considerando-se coeficientes de determinação próximos, como o caso do método hiperbólico e o modelo de Cate e Nelson, os níveis críticos são bem diferentes. O mesmo fato se repete, quando se compara o modelo do segundo grau com o de Mitscherlich.

Os dados obtidos são poucos para que se possa sugerir uma uniformização na escolha do modelo matemático, em trabalhos de fertilidade do solo. Sugerem-se, não apenas estudos com maior volume de dados, mas também, em trabalho desse tipo, uma calibração do nível crítico, obtido matematicamente, nos mesmos solos.

CONCLUSÕES

Os dados permitiram concluir que:

- 1) os teores de potássio nas diferentes formas estão correlacionados significativamente entre si e com o crescimento relativo, sugerindo que o conceito de potássio disponível possa ser usado para qualquer dos extratores usados neste ensaio, com exceção do ácido nítrico 1N;
- 2) os níveis críticos variam conforme o extrator, sendo que os dados de potássio trocável e potencial são os que melhor se ajustam às equações matemáticas usadas e ao processo Cate-Nelson;
- 3) para os dados de um mesmo extrator, os níveis críticos variam, conforme a equação matemática ajustada.

REFERÊNCIAS

- Arnold P.W. & Close B.M. 1961. Releases of non exchangeable potassium British soil cropped in the glasshouse. *J. agric. Sci. Camb.* 57:295-304.
- Bishop R.F., MacLean A.J. & Lutwick L.E. 1954. Fertility studies in soil types. IV. Potassium supply and requirements as shown by greenhouse studies and laboratory tests. *Can. J. agric. Sci.* 34:374-384. (*Soil and Fertilizers* 18(1):61).
- Braga J.M. 1972. Formas de potássio e estabelecimento de nível crítico para alguns solos do Estado de Minas Gerais. Tese, Esc. Sup. Agric. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, S. Paulo. 143 p.
- Bray R.H. 1948. Correlation of soil tests with crop to added fertilizers and with fertilizers requirements. p. 53-85. In Kitchen, H.B. (ed.) *Diagnostic techniques for soil and crop.* American Potash Institute, Washington.
- Catani R.A. 1954. Estudo do potássio nos solos do Estado de São Paulo. Tese, Esc. Sup. Agric. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, S. Paulo. 145 p.
- Catani R.A., Gallo J.R. & Gargantini H. 1955. Amostragem do solo, métodos de análise, interpretação e indicações gerais para fins de fertilidade. *Boim* 69, Inst. Agronômico, Campinas. 28 p.
- Cate R.B. & Nelson L.A. 1965. A rapid method for correlation of soil test analysis with plant response data. *Bull. 1, Int. Soil Testing Project, North Carolina.* 22 p.
- Cate R.B. & Nelson L.A. 1971. A simples statistical procedure for partitioning soil test correlation data into two classes. *Soil Sci. Am. Proc.* 35:658-660.
- Datta N.P. & Kalbande A.R. 1967. Correlation of response in paddy with soil test potassium in different Indian soils. *J. Indian Soc. Sci.* 15:1-5.
- Fitts J.W. & Nelson W.L. 1956. The determination of lime and fertilizer requirements of soil through chemical tests. *Adv. Agron.* 6:242.
- Freitas L.M.M., McLung A.C. & Gomes F.P. 1966. Determinación de las zonas de déficit potásico para el cultivo del algodón. *Rev. Potasa, Berna,* 5:1-13.
- Gama M.V.da 1967. Liberação e duração de potássio em alguns solos. *Agronomia Lusitana* 2(1-2):99-115.
- Grewall J.S. & Kanwar J.S. 1966. Forms of potassium in Punjab soils. *J. Indian Soc. Sci.* 14:63-67.
- Halstead R.L. & Heeney L.M. 1959. Exchangeable and water soluble potassium in soils and degree of saturation in relation to tomato yields. *Can. J. Soil Sci.* 39:129-135.
- Hende A.V.D. & Cottenie A.H. 1960. L'estimation de la fertilité du sol par les méthodes chimiques nouvelles. *Comp. Rend. de Recherches, Bruxelles,* 232 p.
- Hood J.T., Brady N.C. & Lathwell D.J. 1956. The relationship of water-soluble and exchangeable potassium to yield and potassium uptake by ladino clover. *Soil Sci. Soc. Am.* 20:228-231.
- Horton J.H. 1949. A greenhouse study of the release and fixation of potassium in three North Carolina seeded to alfafa. Thesis, North Carolina University, Raleigh. 45 p.
- Hunter A.H. & Pratt P.F. 1957. Extraction of potassium from soils by sulphuric acid. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 21:505-598.
- Laws W.D. 1962. Potassium status of eight Texas soils as related to crop yield and plant composition. *Soil Sci.* 94:230-234.
- Martini J.A. 1966. Caracterización del estado de potasio en seis suelos de Panamá - Fitotecnia Latino Americana, Turrialba, 3(1-2):163-168.
- MacLean A.J. 1961. A water soluble K, percent K-saturation and pK-1/2p Ca as indicate of management effects on K status of soil. *Tans. 7th Int. Congr. Soil Sci.* 3:86-91.
- Mohr N. 1959. Teor e fornecimento de potássio dos solos do Rio Grande do Sul. VII Congr. Bras. de Ciênc. Solo, Piracicaba, S. Paulo.
- Oommen P.K. & Iswaran V. 1962. Methods for determination of available potassium in Indian soils. *Indian Agric. Res. Inst.* 31:98-1962.
- Rengaswamy P., Gopalswamy A., Gopalakrishan V. & Natarajam R. 1966. Relationships between the total and critic soluble forms of phosphorus and potassium in the aluvial and laterite soil of Andras State. *J. Indian Soc. Soil Sci.* 14:85-89.
- Reid P.H. & Copelano C. 1969. Analytical methods used by the testing North Carolina Dep. Agricultura. Raleigh. 19 p. (Mimeo.)
- Semb G. & Uhlen G. 1955. A comparison of potassium and phosphorus in soil based on field experiments. *Acta Agron. Scand.* 5:44-68. (*Soil and Fertilizers* 18(2):600)
- Sutton P. & Seay W.A. 1958. Relationship between the potassium removed by millet and red clover and the potassium extracted by 4 chemical methods from 6 Kentucky soils. *Sci. Soc. Am. Proc.* 22:110-115.
- Vettori L. 1969. Métodos de análises do solo. *Boim téc. 7, EPE, Rio de Janeiro.* 24 p.
- Wiese R. A. 1961. Soil properties and chemical methods relating the availability of potassium in selected southeastern Piedmont and mountain soils. Ph.D. thesis, North Carolina State University, Raleigh. 137 p.

ABSTRACT.- Braga, J.M. [*The importance of a mathematical model to determine the critical level of potassium in soils*]. Importância do modelo matemático na determinação do nível crítico de potássio no solo. *Pesquisa Agropecuária Brasileira, Série Agronomia* (1976) 11, 71-75 [Pt, en] Univ. Fed. Viçosa, Cx. Postal 309, Viçosa, MG, Brazil.

Forms of potassium were determined in twenty soils from the State of Minas Gerais, Brazil. For each of these forms, the critical level in relation to relative growth was determined using different mathematical models.

That the critical level of this element in the soil depends on the mathematical model used to adjust the data was positively established.

These levels vary according to the method of extraction used in the determination of this element.

Index terms: Soils, potassium, critical level, determination, mathematical model.