USO DA PROBABILIDADE DO ERRO TIPO II NA DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE REPETIÇÕES NOS DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS[1]

JOSÉ RUY PORTO DE CARVALHO[2]

RESUMO - Baseado num experimento inteiramente casualizado de calibração e análise de solos para potássio em arroz irrigado, com doses de 0, 150, 300 e 450 kg/ha de K_2O e fixados o poder do teste e o coeficiente de regressão, obtêm-se tabelas indicativas do número de repetições, usando S.Q. Tratamentos e S.Q. Regressão Linear, a fim de se testarem hipóteses do tipo linear. Vê-se, nitidamente, que, para hipóteses lineares, a S.Q. Regressão Linear, quando comparada com a S.Q. Tratamentos, apresenta-se como um teste bem mais poderoso, oferecendo resultados altamente significativos. Desse modo, fixado um poder de teste desejável, obtém-se o número de repetições necessárias para se chegar a este poder, proporcionando uma economia substancial de tempo e dinheiro ao experimentador.

Termos para indexação: tamanho de amostra, erro tipo II, poder de teste, hipóteses lineares.

USE OF THE PROBABILITY OF TYPE II ERROR FOR DETERMINING THE NUMBER OF REPLICATIONS IN THE EXPERIMENTAL DESIGNS

ABSTRACT - This study was done on data of soil calibration curve and potassium analysis of flood rice soil. A completely randomized design was used with four levels of potassium: 0, 150, 300 and 450 kg/ha. The power test and regression coefficient were fixed to set up tables using SST and SSR to test linear hypothesis. Regression sum of square test was better than treatment sum of square in linear hypothesis, and it gave high signicant results. Fixed a desirable power test, this method provides a number of necessary replications to reach that power, this meaning substancial time and money economy.

Index terms: sample size, type II error, test power, linear hypothesis.

INTRODUÇÃO

Entre os diversos problemas encontrados pela Estatística na Experimentação Agrícola, a determinação do número de repetição é, sem dúvida, um dos principais.

Sabe-se que todo teste estatístico de uma hipótese de nulidade Ho está sujeito a dois tipos de erros:

a. Rejeitar a hipótese Ho quando verdadeira; chamado de **erro do tipo I**, cuja probabilidade de ser cometido é denotada por α.

b. Aceitar a hipótese Ho quando falsa; chamada de **erro do tipo II**, cuja probabilidade de ocorrência se denota por β.

Para que qualquer teste de hipótese seja bom, ele deve ser planejado de modo que as probabilidades α e β sejam reduzidas ao mínimo.

Isto não é simples, pois, dado um tamanho de amostra fixo, a tentativa de diminuir a probabilidade de um certo tipo de erro, geralmente acarreta o acréscimo da do outro tipo. Se, por exemplo, α for diminuído, β é aumentado, e, em conseqüência, diminui o poder do teste, pois este é definido como sendo $P = 1 - \beta$, isto é, frente a uma determinada hipótese alternativa Ha, é a probabilidade de rejeitar Ho quando esta é falsa, ou seja, quando Ha é verdadeira.

Um dos caminhos para a redução de ambos os tipos de erro consiste em aumentar o tamanho de amostra, o que, às vezes, não é possível ou viável, economicamente.

O objetivo deste estudo consiste em, fixados P e α, determinar o tamanho da amostra, ou seja, o número de repetições necessárias no caso de experimentos inteiramente casualizados, para que se tenham condições de aceitar hipóteses alternativas do tipo linear. Será mostrado como esse número pode variar, dependendo da estatística a ser usada como teste.

---

1 Aceito para publicação em 15 de julho de 1980.

2 Estatístico, M.Sc., Centro Nacional de Pesquisa de Arroz e Feijão (CNPAF) - EMBRAPA, Caixa Postal 179, CEP 74.000 - Goiânia, GO.

MATERIAL E MÉTODOS

Neste estudo será considerado o teste Ho: $t_1 = t_2 = \dots t_I = 0$ versus Ha: pelo menos um $t_i \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, I$, corresponde ao experimento de calibração de análise de solos para potássio em arroz irrigado, com doses de 0, 150, 300, 450 kg/ha de K_2O (Tabelas 1 e 2).

TABELA 1. Produção em kg por parcela.

X	0	150	300	450
	5,60	5,80	3,90	3,50
	5,25	4,10	4,10	5,55
	4,10	4,40	5,10	5,00
	4,90	4,45	5,65	5,20
	19,85	18,75	18,75	19,25

TABELA 2. Análise de variância.

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F.
Tratamentos	3	0,2050	0,0683	0,11
Resíduo	12	7,4725	0,6227	
Total	15	7,6775		

Ao nível de significância de 5%, o valor crítico de F para 3 e 12 graus de liberdade é 3,49; como o valor obtido é menor do que o valor crítico, conclui-se que o teste não é significativo, isto é, não se rejeita a hipótese de nulidade Ho.

Sob a hipótese de nulidade, isto é, supondo-se que os tratamentos sejam todos equivalentes, a S.Q. Tratamentos tem distribuição de $X^2(p)$ central; a S.Q. Resíduo também apresenta uma distribuição de $X^2(q)$ central, independente da anterior; logo, o quociente entre os dois segue uma distribuição F(p, q) central com **p** e **q** graus de liberdade.

Sob uma outra hipótese diferente da hipótese de nulidade, a S.Q. Tratamentos na sua forma quadrática $\frac{Y'AY}{\sigma^2}$, onde A é idempotente de característica p = I - 1, segue uma distribuição $X^{2'}$ (p, λ) (Qui-quadrado não central) com **p** graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade

$$\lambda = \frac{J \sum_{i=1}^{I} t_i^2}{2\sigma^2},$$

como se demonstrará adiante; a S.Q. Resíduo, na sua forma quadrática $\frac{Y'BY}{\sigma^2}$, onde B é idempotente de característica q = I (J - 1), segue uma distribuição X^2 (q, 0) (Qui-quadrado central), com **q** graus de liberdade; e, como essas duas formas quadráticas $\frac{Y'AY}{\sigma^2}$ e $\frac{Y'BY}{\sigma^2}$ são independentes, pois A . B = ϕ, pode-se afirmar que o quociente entre $X^{2'}$ (p, λ) e X^2 (q, 0) segue uma distribuição F não central F' (p, q, λ), com p e q graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade λ.

S.Q. Tratamentos como teste de efeito linear dos tratamentos

Para este caso, considera-se o seguinte modelo matemático:

$X_{ij} = m + t_i + e_{ij}$ ou na sua forma matricial $Y = X\gamma + E$, onde **m** representa a média geral, t_i o efeito do tratamento **i** e e_{ij} o erro causal, normal e independentemente distribuído com média zero e variância σ^2, isto é, $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.

Seja o parâmetro de não-centralidade $\lambda = \frac{\mu' A \mu}{\sigma^2}$ onde

A é idempotente (A = A' e A = A^2), $\mu = E(Y) = E(X\gamma + \epsilon)$

$= X\gamma$, logo $\lambda = \frac{\mu'A \; A\mu}{2\sigma^2} = \frac{\mu'A'A\mu}{2\sigma^2} = \frac{(A\mu)'A\mu}{2\sigma^2}$, mas

$$A\mu = \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_1 \\ \hdashline t_I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_I \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad \text{e } (A\mu)' = [t_1, \dots t_1, t_I \dots, t_I]_{1 \times N}$$

$(A\mu)'A\mu = t_1^2 + \dots + t_1^2 + \dots + t_I^2 + \dots + t_I^2 = J \sum_{i=1}^{I} t_i^2$, então:

$$\lambda = \frac{J \sum_{i=1}^{I} t_i^2}{2\sigma^2} \quad (1)$$

$$\text{onde}\ \mu = \begin{bmatrix} m+t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m+t_1 \\ \cdots\cdots \\ m+t_I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m+t_I \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

e λ é chamado parâmetro de não-centralidade, correspondente ao modelo inteiramente casualizado.

Por outro lado, experimentos de adubação com doses crescentes de nutriente geralmente apresentam uma tendência de acréscimo de resposta. Considerando-se o componente linear para efeito de tratamento $t_i = b\left(i - \frac{I+1}{2}\right)$, onde b = coeficiente de regressão; t_i = efeito do tratamento i; i = 1,2 . . ., I, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{I} t_i^2 = \sum_i (\bar{\tau}_i - \bar{\tau})^2 = \sum_i \left\{ b\left(i - \frac{I+1}{2}\right) \right\}^2,$$

$$= b^2 \sum_i \left(i - \frac{I+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2\, I\,(I+1)\,(I-1)}{12}$$

onde

$\sum_i i^2 = \frac{I\,(I+1)\,(2I+1)}{6}$ soma dos quadrados dos I primeiros números naturais;

$\sum_i i = \frac{I\,(I+1)}{2}$ soma dos I primeiros números naturais;

Voltando-se à fórmula (1) e substituindo o valor encontrado pela Σt_i^2, obtém-se:

$$\lambda = \frac{J\, b^2\, I\,(I+1)\,(I-1)}{12.2.\sigma^2}$$

Tirando o valor de J,

$$J = \frac{24\,\lambda\,\sigma^2}{b^2\, I\,(I+1)\,(I-1)}$$

Na realidade, não se vai obter o número exato de repetições, mas, sim, uma estimativa, pois baseou-se na estimativa da variância residual.

Então,

$$\hat{J} = \frac{24\,\lambda\,\hat{\sigma}^2}{b^2\, I\,(I+1)\,(I-1)} \qquad (2)$$

onde: $\hat{J}$ = número estimado de repetições;
λ = parâmetro de não-centralidade;
$\hat{\sigma}^2$ = estimativa da variância residual.

S.Q. Regressão como teste de efeito linear dos tratamentos

A S.Q. Tratamentos dá um teste bem geral para qualquer hipótese alternativa.

Como neste estudo se objetiva testar alternativas lineares, são desdobrados os graus de liberdade de tratamentos em 1 grau para regressão linear, com o fim de verificar se, para as hipóteses em estudo, a S.Q. Regressão Linear se apresenta como um teste mais poderoso.

TABELA 3. Análise de variância.

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F.
Regressão Linear	1	0,0405	0,0405	0,07
Desvio de Regressão	2	0,1645	0,0823	0,13
Tratamentos	(3)	(0,2050)	(0,0683)	(0,11)
Resíduo	12	7,4725	0,6227	0,13
Total	15	7,6775		

$F_{1,\,12}$ a 5% = 4,75

Será estabelecido o modelo matemático para regressão linear:

$$Y_{ij} = a + bx_i + e_{ij},$$

onde:
a = coeficiente linear da reta
b = coeficiente angular da reta ou coeficiente de regressão;
x_i = variável independente fixa;
e_{ij} = erro causal distribuído N (0, σ^2);
Y_{ij} = variável aleatória.

Pode-se afirmar que, sob uma hipótese diferente da hipótese de nulidade, a S.Q. Regressão Linear segue uma distribuição $X^{2'}(1, \lambda)$; a S.Q. Resíduo segue uma distribuição $X^2(q, 0)$; logo, o quociente

$$\frac{X^{2'}(1, \lambda)}{X^2(q, 0)}$$

segue uma distribuição F' (1, q, λ), sendo que $\lambda = \frac{\mu' K \mu}{2\sigma^2}$ onde K é uma matriz idempotente de característica igual a 1.

Por procedimento análogo ao anterior, tem-se:

$$\lambda = \frac{J\, b^2\, \Sigma x^2}{2\sigma^2} \quad e,$$

considerando $x_i = i - \frac{I+1}{2}$, obtém-se

$$\lambda = \frac{J\, b^2\, I\,(I+1)\,(I-1)}{24\,\sigma^2}$$

$$\bar{J} = \frac{24\,\lambda\,\bar{\sigma}^2}{b^2\, I\,(I+1)\,(I-1)} \qquad (3)$$

Convém notar que as fórmulas (2) e (3) para $\bar{J}$ são iguais, dependendo apenas do valor de λ.

Como a função de densidade de F' não é tabulada, serão utilizados, na determinação de λ, as Tabelas 4 e

TABELA 4. Tabela de Beta Não-Central.
Entra com $\beta_\rho(\nu_1, \nu_2, \Phi)$, onde $\rho = \int_0^{\beta_\rho(\nu_1, \nu_2, \Phi)} g(\beta)\, d\beta$
$E^2_{.05}$ e os valores correspondentes do p (II) $f_1 = 1$

f_2	$E^2_{.05}$	Φ									
		1	1.5	2	2.5	3	4	5	6	7	8
2	.903	.862	.763	.643	.517	.395	.200	.083	.028	.008	.002
4	.658	.805	.631	.428	.247	.120	.016	.001			
6	.500	.777	.570	.343	.164	.061	.004				
7	.444	.768	.552	.319	.144	.050	.003				
8	.399	.761	.537	.302	.129	.041	.002				
9	.362	.756	.526	.288	.119	.036	.001				
10	.332	.751	.517	.278	.111	.032	.001				
11	.306	.747	.510	.269	.105	.029	.001				
12	.284	.744	.504	.262	.100	.027	.001				
13	.264	.741	.499	.256	.096	.025	.001				
14	.247	.739	.494	.251	.093	.024	.001				
15	.232	.737	.490	.247	.090	.023					
16	.219	.735	.487	.243	.087	.022					
17	.207	.734	.484	.240	.085	.021					
18	.197	.732	.481	.237	.084	.020					
19	.187	.731	.479	.235	.082	.020					
20	.179	.730	.477	.233	.081	.019					
21	.171	.729	.475	.231	.079	.019					
22	.164	.728	.473	.229	.078	.018					
23	.157	.727	.471	.227	.077	.018					
24	.151	.726	.470	.226	.076	.018					
25	.145	.725	.468	.224	.075	.017					
26	.140	.725	.467	.223	.075	.017					
27	.135	.724	.466	.222	.074	.017					
28	.130	.723	.465	.221	.073	.017					
29	.126	.723	.464	.220	.073	.017					
30	.122	.722	.463	.219	.072	.016					
60	.063	.715	.450	.205	.065	.014					
∞		.707	.437	.193	.058	.011					

ν_1 = graus de liberdade do numerador.
ν_2 = graus de liberdade do denominador.

5, feitas por P.C. Tang, (Graybill 1961) as quâis podem ser usadas para resolver

$$\int_0^{F\alpha} f(F')\, dF'$$

para certos valores de Fα (F crítico).

Estas tabelas não são dadas explicitamente em termos de F', mas, sim, em termos de E^2, onde

$$E^2 = \frac{pF'}{q + pF'}\ .$$

com

p = graus de liberdade correspondente ao $X^{2'}$ (p, λ);

q = graus de liberdade correspondente ao X^2 (q, 0).

A função de densidade de E^2 apresentada por Graybill (1961), página 79, é:

$$g\,(E^2; p, q, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(E^2)^{½\,(2\,i+p-2)}\ (1-E^2)^{½\,(q-2)}}{B\left(\frac{q}{2}, \frac{2\,i+p}{2}\right)} \cdot \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i\,!}$$

com $0 \leqslant E^2 \leqslant 1$

Se λ = 0, g (E^2; p, q, λ) é a distribuição Beta.

TABELA 5. Tabela de Beta Não-Central.

Entra com $\beta_\rho(\nu_1, \nu_2, \Phi)$, onde $\rho = \int_0^{\beta_\rho(\nu_1, \nu_2, \Phi)} g\,(\beta)\, d\beta$

E^2 .05 e os valores correspondentes do p (II) **$f_1 = 3$**

f_2	E^2 .05	Φ									
		1	1.5	2	2.5	3	4	5	6	7	8
2	.966	.888	.817	.726	.624	.519	.324	.177	.084	.035	.013
4	.832	.832	.830	.670	.468	.278	.139	.020	.001		
6	.704	.791	.574	.326	.139	.044	.002				
7	.651	.776	.540	.283	.106	.028					
8	.604	.764	.513	.251	.084	.018					
9	.563	.754	.491	.226	.068	.013					
10	.527	.745	.472	.206	.057	.010					
11	.495	.738	.457	.190	.049	.088					
12	.466	.731	.444	.178	.043	.006					
13	.440	.726	.433	.167	.038	.005					
14	.418	.721	.422	.158	.035	.004					
15	.397	.716	.414	.151	.032	.004					
16	.378	.712	.406	.144	.029	.003					
17	.361	.709	.399	.139	.027	.003					
18	.345	.705	.393	.134	.025	.002					
19	.331	.702	.388	.130	.024	.002					
20	.317	.700	.383	.126	.022	.002					
21	.305	.697	.379	.123	.021	.002					
22	.294	.695	.375	.119	.020	.002					
23	.283	.693	.371	.117	.019	.002					
24	.273	.691	.367	.114	.019	.001					
25	.264	.689	.364	.112	.018	.001					
26	.255	.687	.361	.110	.017	.001					
27	.248	.686	.359	.108	.017	.001					
28	.240	.684	.356	.106	.016	.001					
29	.233	.683	.354	.105	.016	.001					
30	.226	.682	.352	.103	.015	.001					
60	.121	.662	.320	.083	.010	.001					
∞		.642	.289	.067	.007						

ν_1 = graus de liberdade do numerador.

ν_2 = graus de liberdade do denominador.

Se $\lambda \neq 0$, $g(E^2; p, q, \lambda)$ é a Beta não-central.

Tang resolveu a integral

$$\beta = \int_O^{E^2\alpha} g(E^2; p, q, \Phi)\, dE^2,$$

e define Φ como sendo

$$\Phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{p+1}}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como, neste exemplo, $\hat{\sigma}^2 = 0{,}6227$ e $I = 4$, fixando-se um coeficiente de regressão $b = 0{,}1$, por exemplo, para determinarmos o número estimado de repetições $\hat{J}$, basta obter-se o valor de λ.

Sendo λ função de p, obtêm-se valores distintos para $\hat{J}$ quando se consideram S.Q. Tratamentos e S.Q. Resíduo para teste de efeito linear de tratamentos.

No caso de se ter a S.Q. Tratamentos como teste de efeito linear de tratamentos, pela Tabela 5 de Tang com $p = 3$ e $q = 12$, para $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}50 \Rightarrow P(\Phi) = 0{,}50$, logo, são encontrados:

$$\begin{array}{lcl} \Phi & & \beta \\ 1 & \longrightarrow & 0{,}731 \\ 1{,}5 & \longrightarrow & 0{,}444 \end{array}$$

por interpolação linear

$$\begin{array}{lcl} 0{,}5 & \longrightarrow & 0{,}287 \\ x & \longrightarrow & 0{,}231 \end{array}$$

$$x = \frac{0{,}231 \cdot 0{,}5}{0{,}287} = 0{,}4024$$

para $\beta = 0{,}50 \Rightarrow \Phi = 1{,}4024$, mas

$$\Phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{p+1}} \Rightarrow 1{,}4024 = \sqrt{\frac{2\lambda}{4}} \Rightarrow \lambda = 3{,}9335$$

Então, para um $P(\Phi) = 0{,}50$, obteve-se um $\lambda = 3{,}9335$ e, substituindo-se em (2), vai-se obter o número estimado de repetições para um determinado coeficiente de regressão.

Variando o coeficiente de regressão b e a probabilidade do erro tipo II (β), vai-se obter a seguinte tabela.

TABELA 6. Número de repetições, fixados o poder do teste e o coeficiente de regressão.

P (Φ)	b					
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
0,50	9798	2450	392	98	25	4
0,40	7515	1879	301	76	19	3
0,30	5535	1384	222	56	14	3
0,20	3690	923	148	(38)	10	2

No caso de se ter S.Q. Regressão como teste de efeito linear dos tratamentos, pela Tabela 4 de Tang com $p = 1$ e $q = 12$ graus de liberdade, para $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}50 \Rightarrow P(\Phi)\ 0{,}50$, obtém-se:

$$\begin{array}{lcl} \Phi & & \beta \\ 1{,}5 & \longrightarrow & 0{,}504 \\ 2 & \longrightarrow & 0{,}262 \end{array}$$

por interpolação linear

$$\begin{array}{lcl} 0{,}5 & \longrightarrow & 0{,}242 \\ x & \longrightarrow & 0{,}004 \end{array}$$

$$x = \frac{0{,}004 \cdot 0{,}5}{0{,}242} = 0{,}0083$$

para $\beta = 0{,}50 \Rightarrow \Phi = 1{,}5083$, mas

$$\Phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{p+1}} \Rightarrow \lambda = 2{,}2750$$

Logo, para $P(\Phi) = 0{,}50$, obteve-se $\lambda = 2{,}2750$ e, substituindo-se em (3), será obtido o número estimado de repetições para um determinado coeficiente de regressão.

Variando a probabilidade do erro tipo II, será obtida a seguinte Tabela.

TABELA 7. Número de repetições, fixados o poder do teste e o coeficiente de regressão.

P (Φ)	b					
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
0,50	5667	1417	227	57	15	3
0,40	4210	1053	169	43	11	2
0,30	2969	743	119	30	8	2
0,20	1979	495	79	(20)	5	1

CONCLUSÕES

Comparando-se as duas tabelas obtidas, verifica-se que, enquanto para S.Q. Tratamento seriam necessárias 38 repetições para se obter significância a um nível de 5% para efeitos lineares de tratamentos especificados com poder 20%, para S.Q. Regressão Linear seriam necessárias 20 repetições.

Vê-se, nitidamente, que, para hipóteses lineares, a S.Q. Regressão Linear é um teste mais poderoso do que S.Q. Tratamentos.

É por essa razão que, quando se faz uma análise de variância e não se obtém significância para tratamentos, desdobrando os graus de liberdade, obtém-se em muitas vezes significância para regressão linear.

Concluí-se, então que, para um experimento futuro, fixados um poder de teste de 50% e um coeficiente de regressão 0,1 por exemplo, serão necessárias 57 repetições para detectar significância para hipóteses alternativas lineares.

REFERÊNCIAS

GRAYBILL, F.A. **An introduction to linear statistical models.** Nova York, McGraw-Hill, 1961. 463 p.