

ADIÇÃO DE COMPONENTE SAZONAL EM MODELOS DE CRESCIMENTO¹

PAULO SILVEIRA JÚNIOR² e AMAURI ALMEIDA MACHADO³

RESUMO - São apresentados os resultados de um estudo do desenvolvimento ponderal de bovinos da raça Ibagé (5/8 Angus - 3/8 Zebu) que adotou o modelo Brody para a raiz cúbica do peso com um componente periódico adicional para levar em conta a oscilação sazonal do peso. Apresenta-se, também, um método de obtenção de estimativas preliminares para dar início ao processo iterativo. A transformação raiz cúbica foi usada com o propósito de obter a homogeneidade de variância. Esta transformação facilitou o tratamento teórico do modelo.

Termos para indexação: curvas de crescimento, homogeneidade de variância, modelos não-lineares, estimativas de parâmetros.

ADDITION OF A SEASONAL COMPONENT TO GROWTH MODELS

ABSTRACT - The results of a study of the growth in weight of bovines of the Ibagé race (5/8 Angus - 3/8 Zebu) which adopted the model of Brody for the cubic root of the weight with an additional periodic component to take into account the seasonal oscillation of the weight are presented. A method to obtain preliminary estimates of the parameters to initiate the iterative process is also presented. The cubic root transformation was used in order to attain homogeneity of variance. Besides homogenizing the variance, this transformation facilitated the theoretical treatment of the model.

Index terms: growth curve models, homogeneity of variance, nonlinear models, estimates of parameters.

INTRODUÇÃO

Silveira Júnior (1976) ajustou diversos modelos exponenciais a dados ponderais de bovinos da raça Ibagé. Dentre os modelos estudados, os que melhor se ajustaram foram os modelos de Brody et al. (1926) e Von Bertalanffy (1973).

A oscilação sazonal decorrente da influência direta ou indireta dos fatores climáticos no metabolismo do animal (condições das pastagens no inverno, temperaturas elevadas no verão) é um fenômeno bastante conhecido no estado do Rio Grande do Sul, pois, em geral, o peso cai em abril e fica praticamente estacionário até agosto, no primeiro ano de vida do animal; no segundo ano de vida, o peso é estacionário no período de dezembro a março, ocor-

rendo uma queda novamente entre abril e maio, voltando a ficar estacionário até julho e agosto.

Assim, qualquer tentativa de ajustamento de modelos exponenciais a dados ponderais de bovinos sem prévia eliminação da oscilação sazonal poderá conduzir a sensíveis variações nas estimativas dos parâmetros correspondentes, dificultando uma escolha racional do modelo a adotar.

Visando a eliminar a oscilação sazonal presente no desenvolvimento ponderal, bem como homogeneizar a variância dos pesos no tempo, os autores introduzem no modelo Brody, para a raiz cúbica do peso, um componente sazonal. Tal tratamento constitui o objetivo do presente trabalho.

MATERIAL E MÉTODOS

Animais utilizados

Serviram de suporte para o presente trabalho resultados de pesagens de 126 bovinos da raça Ibagé (5/8 Angus - 3/8 Zebu), dos quais 72 eram machos, e 54 fêmeas. Esses animais nasceram em agosto, setembro e outubro no período de 1968/71 e permaneceram em pastagem cultivada durante toda a prima-

¹ Aceito para publicação em 26 de junho de 1989.

Parte da tese apresentada à Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), pelo primeiro autor, no concurso para professor-titular.

² Eng. - Agr., M.Sc., Prof. - Titular, Dep. de Matemática e Estatística da UFPEL. Bolsista do CNPq. Caixa Postal 354, CEP 96100, Pelotas, RS.

³ Eng. - Agr., M.Sc., Prof. - Adjunto, Dep. de Mat. e Estat. da UFPEL.

vera. No mês de dezembro, aqueles que não permaneceram na pastagem cultivada foram transferidos para locais de pastagem nativa, onde ficaram até o mês de julho.

No desenvolvimento ponderal dos 126 animais, Silveira Júnior (1979) evidencia, nos quase dois anos e meio de vida, três períodos da queda e de estabilização de peso. O primeiro período coincide com o inverno, o segundo, com o verão, e o terceiro, com o inverno do ano seguinte.

A alimentação (pastagens) fica bastante agravada, em termos de escassez, tanto no período de inverno como no de verão, o que justifica a perda ou estacionamento dos pesos nesses períodos. A situação das pastagens, portanto, influencia significativamente o desenvolvimento ponderal dos animais.

As pesagens foram realizadas de 28 em 28 dias. Dessa forma, em cada ano foram feitas 13 pesagens, caracterizando-se, portanto, um período de 13 meses.

O histórico e algumas características da raça Ibagé poderão ser encontrados em Silveira Júnior (1976 e 1979) e em Chagas et al. (1972).

Modelo de crescimento

Em análise preliminar dos dados, constatou-se heterogeneidade de variância para os pesos (Fig. 1 e 2). Assim, buscou-se uma transformação de dados que permitisse alcançar uma melhor uniformidade para os dados ponderais. Para tanto, utilizou-se o método apresentado por Amaral (1967), partindo-se

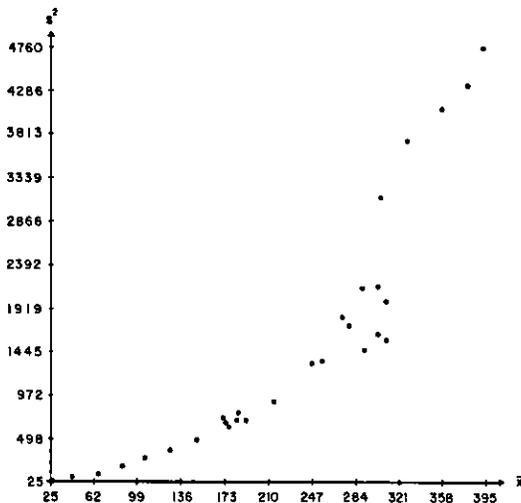


FIG. 1. Relação entre média e variância dos pesos no tempo. Animais machos.

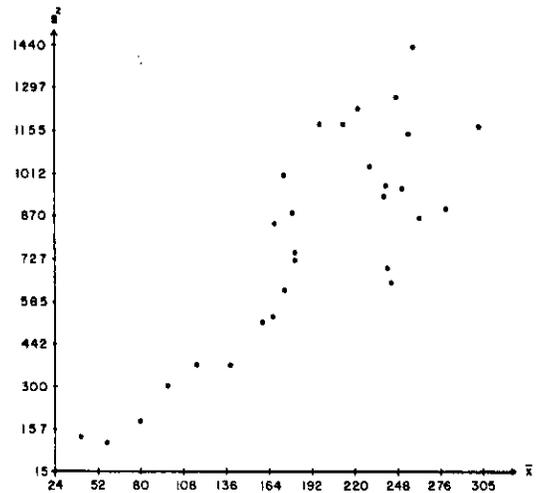


FIG. 2. Relação entre média e variância dos pesos no tempo. Animais fêmeas.

da relação de dependência funcional entre média e variância, da forma $s^2 = Bx^a$, obtendo-se a transformação raiz cúbica.

Em função da transformação adotada e considerando-se a oscilação sazonal presente no desenvolvimento ponderal, introduziu-se aditivamente, no modelo Brody para a raiz cúbica do peso, o componente sazonal $Z(t)$, tal como:

$$\sqrt[3]{W} = A' - B' e^{-Kt} + Z(t)$$

onde $A' = A^{1/3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{W_t}$, raiz cúbica do

peso máximo teórico.

$B' = A^{1/3} - \sqrt[3]{W_0}$, constante de integração,

K é a taxa de crescimento, e

$$Z(t) = p_0 + p_1 \cos\left(\frac{360}{13}t\right) + p_2 \cos\left(\frac{360}{13/2}t\right) + \dots$$

$$+ q_1 \sin\left(\frac{360}{13}t\right) + q_2 \sin\left(\frac{360}{13/2}t\right) + \dots$$

Estimativas preliminares de A' , B' e K

Tomando-se as diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos de dois períodos consecutivos, tem-se:

$$s_t = \sqrt[3]{W_{t+13}} - \sqrt[3]{W_t} = B'(1 - e^{-13K})e^{-Kt},$$

com $Z(t+13) = Z(t)$, uma vez que $Z(t)$ é uma fun-

ção periódica de período T (Amaral 1968). No presente caso, tem-se T = 13.

Assim, como se pode notar, s_t pode ser linearizado por anamorfose.

$$\log s_t = \log B' (1 - e^{-13K}) - (K \log e) t,$$

que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\log s_t = a + bt,$$

sendo $a = \log B' (1 - e^{-13K})$ e $b = -0,4343 K$.

Portanto, para obter as estimativas preliminares de B' e K, basta calcular os coeficientes a e b da equação de regressão $\log s_t = a + bt$.

Para determinar a estimativa preliminar do parâmetro A', parte-se da equação

$$\sqrt[3]{W_t} = A' - B' e^{-Kt} + Z(t)$$

ou

$$A' = \sqrt[3]{W_t} + B' e^{-Kt} - Z(t)$$

Somando-se os 26 valores consecutivos de $\sqrt[3]{W_t}$, o que corresponde a dois anos de vida do animal, tem-se:

$$26 A' = \sum_{t=1}^{26} \sqrt[3]{W_t} + B' \sum_{t=1}^{26} e^{-Kt},$$

$$\text{pois } \sum_{t=1}^{26} Z(t) = 0.$$

Portanto,

$$A' = \left(\sum_{t=1}^{26} \sqrt[3]{W_t} + B' \sum_{t=1}^{26} e^{-Kt} \right) / 26$$

é a estimativa preliminar de A', uma vez que as de B' e K já são conhecidas.

Essas estimativas, denominadas preliminares, podem ser melhoradas aplicando-se o método modificado de Gauss-Newton (Hartley 1961) ao modelo

$$S_t = \sqrt[3]{W_{t+13}} - \sqrt[3]{W_t} = B' (1 - e^{-13K}) e^{-Kt}$$

Análise harmônica do componente sazonal

Com as estimativas preliminares melhoradas dos parâmetros A', B' e K, pode-se fazer a análise harmônica.

Para tanto, calcula-se para cada t (t = 1, 2, ..., 13):

$$\hat{Z}(t) = \sqrt[3]{W_t} - \hat{A}' + \hat{B}' e^{-\hat{K}t}$$

e

$$\hat{Z}(t+13) = \sqrt[3]{W_{t+13}} - \hat{A}' + \hat{B}' e^{-\hat{K}(t+13)}$$

para o primeiro e o segundo ano, respectivamente.

Segundo Amaral (1968), a análise harmônica permite decompor um processo de período básico T em ondas senoidais de períodos T, T/2, T/3, etc.

Considerando-se o mês como unidade de tempo, a variação anual pode ser decomposta em seis ondas senoidais de períodos de 13, 13/2, 13/3, 13/4, 13/5, 13/6 meses correspondentes a ondas de período anual, semestral, quadrimestral, trimestral, de 2,6 e 2,17 meses, respectivamente.

A partir da expressão da componente sazonal

$$Z(t) = p_0 + \sum_{i=1}^6 p_i \cos(i \alpha t) + \sum_{i=1}^6 q_i \sin(i \alpha t),$$

onde $\alpha = 360^\circ/13$, obtém-se um sistema de equações lineares nas treze incógnitas $p_0, p_1, p_2, \dots, p_6, q_1, q_2, \dots, q_6$, quando se substituem os valores de t, t=1, 2, ..., 13. Em virtude da ortogonalidade, o sistema é facilmente resolvido, obtendo-se:

$$p_0 = \frac{1}{13} \sum_{t=1}^{13} Z(t)$$

$$p_i = \frac{1}{6,5} \sum_{t=1}^{13} Z(t) \cos(i \alpha t) e$$

$$q_i = \frac{1}{6,5} \sum_{t=1}^{13} Z(t) \sin(i \alpha t)$$

O critério usado para a seleção dos componentes harmônicos foi o do coeficiente de determinação, incluindo-se no modelo as ondas que explicam pelo menos 90% da oscilação sazonal, em ordem decrescente das suas respectivas amplitudes. Para tanto, obtém-se a soma de quadrados de $\hat{Z}(t)$, decompon-

do-a nas somas de quadrados das ondas anual, semestral, quadrimestral etc, ou seja:

$$\begin{aligned}
 S.Q.\hat{Z}(t) &= \sum_{i=1}^{13} (\sqrt[3]{W_t} - \hat{A}' + B' e^{-Kt})^2 \\
 &= 6,5 \sum_{i=1}^6 (p_i^2 + q_i^2)
 \end{aligned}$$

S.Q. Onda anual = $6,5 (\hat{p}_1^2 + \hat{q}_1^2)$, S.Q. Onda semestral = $6,5 (\hat{p}_2^2 + \hat{q}_2^2)$, ..., S.Q. Onda 13/6 = $6,5 (\hat{p}_6^2 + \hat{q}_6^2)$. Com essa decomposição, podem-se calcular os coeficientes de determinação para cada componente harmônico, como por exemplo o da onda anual $r^2 = 6,5 (\hat{p}_1^2 + \hat{q}_1^2) / S.Q.\hat{Z}(t)$.

Ajustamento do modelo proposto

O modelo proposto para explicar o desenvolvimento ponderal com a componente de oscilação sazonal representada pelos parâmetros das ondas senoidais mais significativas foi ajustado pelo método modificado de Gauss-Newton, onde as estimativas preliminares dos parâmetros A', B' e K foram obtidas através do modelo s_t , e as dos parâmetros harmônicos foram obtidas através da análise harmônica.

Ajustou-se, também, pelo método modificado de Gauss-Newton, o modelo Brody para a raiz cúbica do peso sem os parâmetros harmônicos, com a finalidade de verificar diferenças no ajustamento.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na análise preliminar dos dados foram constatados períodos de queda e de estabilização de peso, bem como heterogeneidade de variância do mesmo. Eliminou-se a oscilação sazonal do desenvolvimento ponderal com a inclusão no modelo de crescimento de um componente harmônico e a heterogeneidade de variância com transformações em torno da raiz cúbica.

Pelo teste de Cochran (Winer 1971), ao nível $\alpha = 0,05$, a estatística C, quando os dados não são submetidos à transformação raiz cúbica, assume os valores 0,1056 e 0,0628 para os machos e fêmeas respectivamente, significativos em ambos os casos, o que comprova não haver homogeneidade de variância.

Por outro lado, quando o teste de Cochran é aplicado aos dados transformados em raiz cúbica, a estatística C assume os valores 0,0636 e 0,0529 para os

machos e fêmeas, respectivamente, significativo só para os machos, porém muito próximo do valor crítico do teste.

Diante desses resultados, optou-se pela raiz cúbica, que, além da homogeneização das variâncias (Fig. 3 e 4), facilitou consideravelmente o tratamento teórico do modelo.

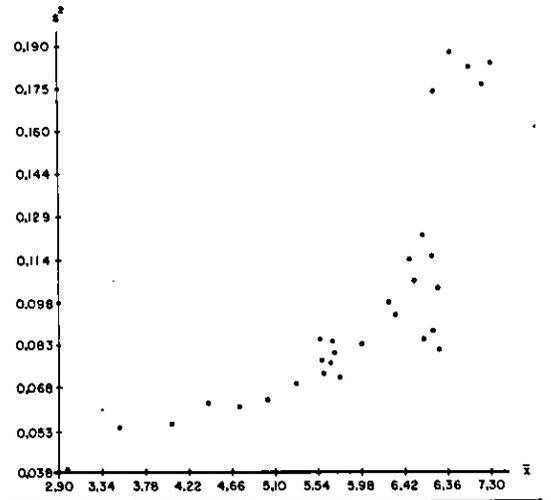


FIG. 3. Relação entre média e variância das raízes cúbicas dos pesos no tempo. Animais machos.

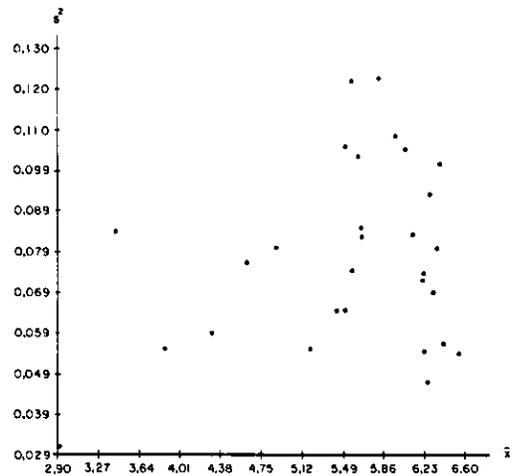


FIG. 4. Relação entre média e variância das raízes cúbicas dos pesos no tempo. Animais fêmeas.

Estimativas preliminares de A', B' e K

Os resultados da aplicação do método de obtenção de estimativas, tanto preliminares como prelimi-

nares melhoradas, podem ser observados na Tabela 1, onde constam os resultados para o animal 001.

componentes harmônicos que, na ordem decrescente das respectivas amplitudes, somem pelo menos 90% da oscilação sazonal.

TABELA 1. Estimativas de A', B', K, P₀, P₁, P₂, q₁ e q₂ para o animal 001.

Tipo de estimativa	Parâmetros							
	A'	B'	K	P ₀	P ₁	P ₂	q ₁	q ₂
Preliminar	7,961	3,999	0,062	-0,091	-0,368	-0,081	0,041	0,021
Preliminar Melhorada	7,590	3,928	0,081	-	-	-	-	-

Análise harmônica do componente sazonal

De posse das estimativas de A', B' e K calculou-se para cada t (t = 1, 2, ..., 26):

$$\hat{Z}(t) = \sqrt[3]{\hat{W}_t} - \hat{A}' + \hat{B}' e^{-\hat{K}t}$$

Quaisquer dois períodos consecutivos, entretanto, seriam, teoricamente, utilizáveis.

Uma vez obtidos os vinte e seis valores de $\hat{Z}(t)$, t = 1, 2, ..., 26, determinou-se $\hat{T}(t) = \hat{Z}(t) + \hat{Z}(t + 13)$ e fez-se a análise harmônica, de acordo com Amaral (1968).

Optou-se pela análise harmônica para a soma dos dois anos, considerada a mais adequada, por levar em conta a variação sazonal de dois anos de vida do animal.

Como na obtenção das estimativas preliminares foram utilizadas dezesseis diferentes entre as raízes cúbicas dos pesos, variável s_t, número este diferente do período básico, 13, a soma de $\hat{T}(t)$ não é igual a zero, e portanto p₀ resulta também diferente de zero.

O total da variação sazonal $\sum [\hat{T}(t)]^2$, com 12 graus de liberdade, foi decomposto nas somas de quadrados dos componentes de variação anual, semestral, quadrimestral, trimestral, 13/5 e 13/6, cada um com 2 graus de liberdade, com vistas à determinação do coeficiente r² para cada componente harmônico. Tal procedimento foi realizado para os 126 animais, e, a título de exemplificação, apresentam-se na Tabela 2 os resultados do animal 001, cuja S.Q. $\hat{T}(t) = 1,0753$.

Observa-se que as ondas anual e semestral somam 87,13% da variação total de $\hat{T}(t)$.

O critério para a seleção dos parâmetros p₁ e q₁ será com base no coeficiente r², escolhendo-se os

Para os 126 animais analisados, as duas primeiras ondas, no que se refere ao coeficiente de determinação, apresentaram os resultados mostrados na Tabela 3, onde se evidencia a predominância do número de animais (66%) com r² acumulado para as duas primeiras ondas acima de 90%, e 28% dos animais com r² muito próximo desse limite.

Com base nesses resultados e no critério adotado, os parâmetros que deverão ser adicionados ao modelo de crescimento são p₀, p₁ e q₁ (onda anual) e p₂ e q₂ (onda semestral), cujas estimativas preliminares podem ser vistas na Tabela 1.

TABELA 2. Resultados das somas de quadrados e dos coeficientes de determinação por componente harmônico para o animal 001.

Componente harmônico	S.Q.	r ²
Onda anual	0,8918	82,90
Onda semestral	0,0455	4,23
Onda quadrimestral	0,0390	3,63
Onda trimestral	0,0247	2,30
Onda 13/5	0,0306	2,84
Onda 13/6	0,0442	4,11

Modelo de crescimento proposto

Uma vez selecionados os componentes harmônicos mais significativos, o modelo de crescimento a ser ajustado será o modelo Brody, para a raiz cúbica do peso, acrescido desses componentes periódicos, cujos parâmetros são p₀, p₁ e q₁ e p₂ e q₂.

TABELA 3. Distribuição de freqüência da soma dos coeficientes de determinação dos componentes harmônicos relativos às ondas anual e semestral.

r^2 (Onda anual + onda semestral)	nº de animais
90 — 100	83
80 — 90	35
70 — 80	7
60 — 70	1

Portanto, a expressão do modelo a ser ajustado pelo método modificado de Gauss-Newton é:

$$\sqrt[3]{W_t} = A'' - B' e^{-Kt} + p_1 \cos\left(\frac{360}{13}t\right) + p_2 \cos\left(\frac{360}{13/2}t\right) + q_1 \sin\left(\frac{360}{13}t\right) + q_2 \sin\left(\frac{360}{13/2}t\right)$$

onde $A'' = A' + p_0$, $A' = A^{1/3}$ e $B' = A^{1/3}B$.

São mostrados (Fig. 5 e 6), como ilustração, os resultados do ajustamento do modelo proposto ao desenvolvimento ponderal dos animais 001 e 076, respectivamente.

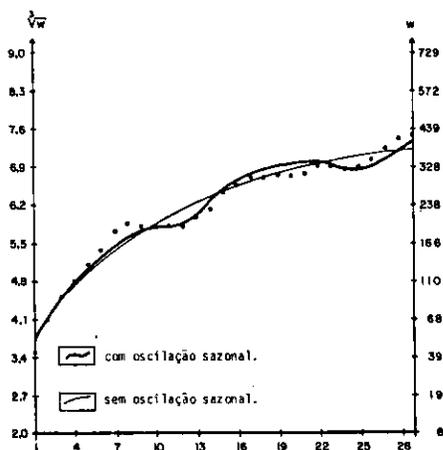


FIG. 5. Curva de crescimento com e sem oscilação sazonal para o desenvolvimento ponderal do animal 001.

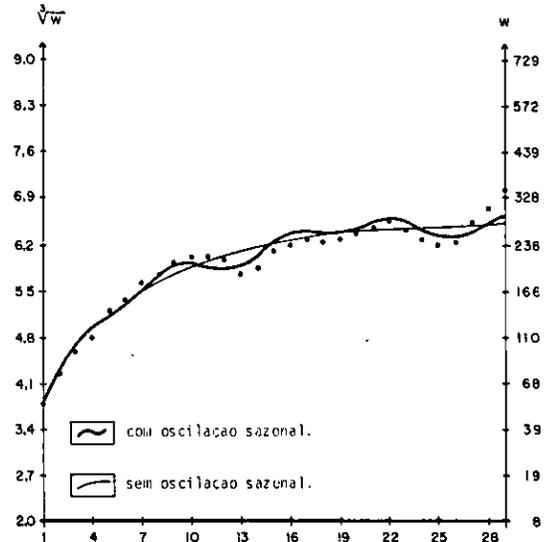


FIG. 6. Curva de crescimento com e sem oscilação sazonal para o desenvolvimento ponderal do animal 076.

Modelo de crescimento sem levar em conta a oscilação sazonal

O modelo Brody, para a raiz cúbica do peso, foi ajustado com a finalidade de mostrar a diferença que ocorre no ajustamento, quando comparado com o mesmo modelo, porém acrescido do componente de oscilação sazonal.

As curvas de crescimento (Fig. 5 e 6) exemplificadas com os animais 001 e 076 mostram o ajustamento do modelo em ambas as situações, onde a curva com o traçado mais forte refere-se ao ajuste com componente sazonal, e a outra curva, ao ajuste sem componente sazonal.

Observa-se que o ajustamento, em ambos os casos, é de melhor qualidade quando o modelo contém o componente sazonal, uma vez que a curva de crescimento resultante acompanha com maior proximidade o desenvolvimento ponderal.

Resultados do ajustamento do modelo proposto

Observou-se, pelos resultados do ajustamento dos 126 animais, que, de uma maneira geral, a variabilidade das estimativas dos parâmetros é menor dentro de cada sexo. Esta observação é constatada mediante uma análise de variância para cada estimativa. Assim procedendo (Tabela 4), nota-se que a variação entre

TABELA 4. Resultados da análise de variância das estimativas dos parâmetros para o modelo de crescimento com componente sazonal.

	Estimativas						
	A''	B'	K	p ₁	q ₁	p ₂	q ₂
Q.M. entre sexo	13,06	10,46	0,024	0,004	0,265	0,016	0,038
Q.M. dentro de sexo	1,35	0,98	0,001	0,002	0,003	0,002	0,001
Teste F	9,67	10,65	19,67	2,35	91,59	8,98	32,14
n.m.s	0,003	0,001	0,0001	0,124	0,00001	0,004	0,00001

sexo só não é significativa para a estimativa do parâmetro p₁.

Esta análise permite afirmar que as estimativas dos parâmetros do modelo são mais uniformes quando obtidas separadamente por sexo, o que indica dever ser o ajustamento feito em função desse fator.

Dessa forma, considerando-se a homogeneidade das estimativas dentro de cada sexo, foram ajustados os modelos com e sem componente sazonal, tomando-se como valor de cada pesagem a média de todos os animais do mesmo sexo. Os resultados constam das Tabelas 5 e 6, onde se observa que os parâmetros A e B apresentam estimativas menores para as fêmeas. O parâmetro K, no entanto, apresenta uma estimativa maior para as fêmeas.

TABELA 5. Estimativas finais dos parâmetros do modelo de crescimento com o componente sazonal para valores médios dentro de cada sexo.

Sexo	Parâmetro						
	A''	B'	K	p ₁	q ₁	p ₂	q ₂
Macho	7,5583	4,0178	0,0757	-0,2056	0,0611	-0,0241	0,0771
Fêmea	6,5911	3,2133	0,1127	-0,1877	-0,0218	-0,0504	0,0451

Ademais, observando-se as Tabelas 7 e 8, nota-se que as variâncias das estimativas dos parâmetros em ambos os sexos têm, em geral, comportamento distinto, qualquer que seja o modelo considerado.

São ilustradas (Fig. 7 e 8) as curvas de crescimento ajustadas aos dados médios de pesagens para os animais machos e fêmeas respectivamente, com e sem o componente sazonal.

Observa-se, também, que o ajustamento para os dados de pesagens dos bovinos da raça Ibagé, sem

TABELA 6. Estimativas finais dos parâmetros do modelo de crescimento sem o componente sazonal para valores médios dentro de cada sexo.

Sexo	Parâmetros		
	A'	B'	K
Macho	7,3957	3,8452	0,0823
Fêmea	6,4450	3,2429	0,1356

TABELA 7. Estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros dos modelos com e sem componente sazonal para o desenvolvimento ponderal médio dos animais machos.

Modelo	Estimativas das variâncias		
	$\hat{V}(\hat{A})$	$\hat{V}(\hat{B})$	$\hat{V}(\hat{K})$
Com componente	0,0279	0,01545	0,00007
Sem componente	0,0403	0,02790	0,00015

TABELA 8. Estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros dos modelos com e sem componente sazonal para o desenvolvimento ponderal médio dos animais fêmeas.

Modelo	Estimativas das variâncias		
	$\hat{V}(\hat{A})$	$\hat{V}(\hat{B})$	$\hat{V}(\hat{K})$
Com componente	0,00656	0,00964	0,00011
Sem componente	0,00700	0,02254	0,00023

levar em conta a oscilação sazonal, conduz a estimativas dos parâmetros com variância maior quando comparada com os resultados do modelo proposto (Tabelas 7 e 8).

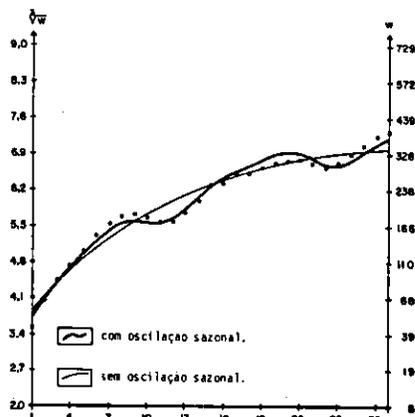


FIG. 7. Curva de crescimento com e sem oscilação sazonal para o desenvolvimento médio dos animais machos.

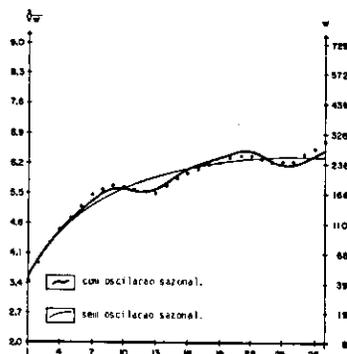


FIG. 8. Curva de crescimento com e sem oscilação sazonal para o desenvolvimento médio dos animais fêmeas.

CONCLUSÕES

1. O ajustamento de modelos exponenciais a dados ponderais de bovinos, cuja oscilação sazonal é relevante, pode conduzir a sensíveis variações nas estimativas dos parâmetros, se esta não for eliminada.

2. O modelo de crescimento mais adequado para o desenvolvimento ponderal dos bovinos da raça Ibagé, para o sistema de manejo utilizado, é:

$$\sqrt[3]{W_t} = A'' - B' e^{-Kt} + p_1 \cos\left(\frac{360}{13}t\right) + p_2 \cos\left(\frac{360}{13}2t\right) + q_1 \sin\left(\frac{360}{13}t\right) + q_2 \sin\left(\frac{360}{13}2t\right),$$

onde $A'' = A^{1/3} + p_0$ e $B' = A^{1/3} B$.

As estimativas dos parâmetros do modelo ajustado ao desenvolvimento ponderal médio dos bovinos da raça Ibagé são as constantes na Tabela 5.

3. O processo de obtenção das estimativas preliminares acelera consideravelmente o ajuste do modelo final.

4. A transformação raiz cúbica, além de homogeneizar a variância, trouxe grandes facilidades teóricas no desenvolvimento do modelo proposto.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Sra. Catharina Beatriz dos Santos Motta, funcionária do Departamento de Desenho do Instituto de Física e Matemática da UFPel, pela execução dos desenhos.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, E.C. Transformação de dados. In: CURSO de Estatística Experimental. Pelotas, IPEAS, 1967.
- AMARAL, E.C. Análise harmônica. *Pesq. agropec. bras.*, Rio de Janeiro, 3:7-43, 1968.

- BRODY, S.; SPARROW, C.D.; KIBLER, H.H. Time relations of growth. II - The equivalence of age in mammals estimated on the basis of their growth constants. **J. Gen. Physiol.**, 9:285-308, 1926.
- CHAGAS, E.C.; CAGGIANO FILHO, P.; GARCIA, J.T.C. **Formação do 5/8 Angus - 3/8 Zebu**. s.l., IPEAS, 1972. Circular IPEAS, 57.
- HARTLEY, H.O. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares. **Technometrics**, 3:269-80, 1961.
- SILVEIRA JÚNIOR, P. **Estudo de alguns modelos exponenciais no crescimento de bovinos da raça Ibagé**. Piracicaba, ESALQ, 1976. 174p. Tese Mestrado.
- SILVEIRA JÚNIOR, P. **Modelo de crescimento para bovinos da raça Ibagé tendo em conta a oscilação estacional**. Pelotas, UFPel, 1979. Tese Livre Docência.
- VON BERTALANFFY, L. **Teoria geral dos sistemas**. Trad. de Francisco M. Guimarães. Petrópolis, Vozes, 1973. 351p.
- WINER, B.J. **Statistical principals in experimental design**. 2 ed. New York, McGraw-Hill, 1971.